

বীজগাণিতিক অনুপাত ও সমানুপাত

MAIN TOPIC

অনুপাত: একই এককে সমজাতীয় দুইটি রাশির পরিমাণের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ভগ্নাংশটিকে রাশি দুইটির অনুপাত বলে।

যেমন: p ও q দুইটি সমজাতীয় রাশি এবং একই এককে প্রকাশিত হতে হবে। অতএব অনুপাতটি-

$$p:q$$

সমানুপাত: যদি চারটি রাশি একরূপ হয় যে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে একটি সমানুপাত উৎপন্ন হয়। a, b, c, d একরূপ চারটি রাশি হলে আমরা লিখি $a:b = c:d$ যা সমানুপাতের উদাহরণ।

ক্রমিক সমানুপাত:

- a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী বলতে বোঝায় $a:b = b:c$
- a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হবে যদি এবং কেবল যদি $b^2 = ac$ হয়।
- ক্রমিক সমানুপাতের ক্ষেত্রে সবগুলো রাশি এক জাতীয় হতে হবে।
- এক্ষেত্রে c কে a ও b এর তৃতীয় সমানুপাতী এবং b কে a ও c এর মধ্য সমানুপাতী বলা হয়।

ধারাবাহিক অনুপাত:

দুই অনুপাত যদি ক:খ এবং ঙ:গ আকারের হয় তাহলে এদেরকে সাধারণ ক:খ:গ আকারে লেখা যায়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়।

অনুপাতের রূপান্তর:

এখানে অনুপাতের রাশিগুলো ধনাত্মক সংখ্যা।

ক) প্রমাণ কর যে, $a:b = c:d$ হলে, $b:a = d:c$ [ব্যস্তকরণ (Invertendo)]

\Rightarrow দেওয়া আছে, $a:b = c:d$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{বা, } ad = bc$$

$$\text{বা, } \frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac} \quad [\text{উভয়পক্ষকে } ac \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

$$\text{বা, } d:c = b:a$$

$$\therefore b:a = d:c \quad (\text{প্রমাণিত})$$

খ) প্রমাণ কর যে, $a:b = c:d$ হলে, $a:c = b:d$ [একান্তরকরণ (Alternendo)]

$$\Rightarrow \text{দেওয়া আছে, } a:b = c:d$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{বা, } ad = bc$$

$$\text{বা, } \frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd} \quad (\text{উভয়পক্ষকে } cd \text{ দ্বারা ভাগ করে)}$$

$$\text{বা, } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\therefore a:c = b:d \quad (\text{প্রমাণিত})$$

গ) প্রমাণ কর যে, $a:b = c:d$ হলে, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ [যোজন (Componendo)]

$$\Rightarrow \text{দেওয়া আছে, } a:b = c:d$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

ঘ) প্রমাণ কর যে, $a:b = c:d$ হলে, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ [বিয়োজন (Dividendo)]

$$\Rightarrow \text{দেওয়া আছে, } a:b = c:d$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

ঙ) প্রমাণ কর যে, $a:b = c:d$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ [যোজন-বিয়োজন (Componendo-Dividendo)]

$$\Rightarrow \text{দেওয়া আছে, } a:b = c:d$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

যোজন করে পাই, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \dots (i)$

আবার, বিয়োজন করে পাই, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

বা, $\frac{b}{a-b} = \frac{d}{c-d} \dots \dots (ii)$ [বাস্তকরণ]

সুতরাং, $\frac{a+b}{b} \times \frac{b}{a-b} = \frac{c+d}{d} \times \frac{d}{c-d}$ [(i) ও (ii) গুণ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ [এখানে $a \neq b, c \neq d$] (প্রমাণিত)

৮) প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে প্রত্যেকটি অনুপাত = $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

\Rightarrow মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$

$\therefore a = bk, c = dk, e = fk, g = hk$

$\therefore \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{bk+dk+fk+hk}{b+d+f+h} = \frac{k(b+d+f+h)}{b+d+f+h}$

কিন্তু k প্রদত্ত সমানুপাতের প্রত্যেকটি অনুপাতের সমান।

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$ (প্রমাণিত)

সমানুপাতিক ভাগ:

কোনো রাশিকে নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করাকে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়। S কে $a:b = c:d$ অনুপাতে ভাগ করতে হলে S কে $a+b+c+d$ ভাগ করে যথাক্রমে a, b, c, d ভাগ নিতে হয়। অতএব,

১ম অংশ = S এর $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{Sa}{a+b+c+d}$

২য় অংশ = S এর $\frac{b}{a+b+c+d} = \frac{Sb}{a+b+c+d}$

৩য় অংশ = S এর $\frac{c}{a+b+c+d} = \frac{Sc}{a+b+c+d}$

৪র্থ অংশ = S এর $\frac{d}{a+b+c+d} = \frac{Sd}{a+b+c+d}$

অর্থাৎ যেকোনো রাশিকে যেকোনো নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করা যায়।

সূত্রাবলী

- দুইটি সংখ্যার গুণফল = সংখ্যাসমূহের ল.সা.গু \times গ.সা.গু
- বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (এক বাহুর দৈর্ঘ্য)²
- আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য \times প্রস্থ
- সরল মুনাফা, $I = prt$
- বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{2}a$
- আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2}$
- মুনাফা-আসল = মুনাফা $+$ আসল

অনুপাতের কতিপয় রূপান্তর/ধর্ম: (সর্বক্ষেত্রে যদি $a:b = c:d$ হয়)

- ব্যস্তকরণ ধর্ম: $a:b = c:d$ হলে অর্থাৎ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ হবে।
- একান্তরকরণ ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ হবে। অথবা, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
- যোজন ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ হবে।
- বিয়োজন ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ হবে।
- যোজন-বিয়োজন ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ হবে।
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$ হবে।
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ হবে।



TYPEWISE MATH

Type-1

১) $x = \frac{10pq}{p+q}$ হলে $\frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q}$ এর মান নির্ণয় কর। ($p = q$)

সমাধান: দেওয়া আছে, $x = \frac{10pq}{p+q}$

$$\text{বা, } \frac{x}{5p} = \frac{2q}{p+q}$$

$$\text{বা, } \frac{x+5p}{x-5p} = \frac{2q+p+q}{2q-p-q} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন}]$$

$$\text{বা, } \frac{x+5p}{x-5p} = \frac{p+3q}{q-p} \dots \dots (i)$$

$$\text{আবার, } x = \frac{10pq}{p+q}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{5q} = \frac{2p}{p+q}$$

$$\text{বা, } \frac{x+5q}{x-5q} = \frac{2p+p+q}{2p-p-q} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন}]$$

$$\text{বা, } \frac{x+5q}{x-5q} = \frac{3p+q}{p-q} \dots \dots (ii)$$

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q} &= \frac{p+3q}{q-p} + \frac{3p+q}{p-q} \\ &= \frac{p+3q}{q-p} - \frac{3p+q}{q-p} \\ &= \frac{p+3q-3p-q}{q-p} \\ &= \frac{2q-2p}{q-p} \\ &= \frac{2(q-p)}{q-p} = 2 \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

২) $p = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ এবং $q = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ হলে $\frac{p^2+3pq+q^2}{p^2-3pq+q^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $p = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ এবং $q = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$$\text{সুতরাং, } p+q = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2 + (\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x})^2 + 2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x} + (\sqrt{1-x})^2 + (\sqrt{1+x})^2 - 2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x} + (\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2} \\
&= \frac{1+x+1-x+1+x+1-x}{(1+x)-(1-x)} \\
&= \frac{4}{2x} \\
&= \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{এবং } pq &= \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{p^2+3pq+q^2}{p^2-3pq+q^2} \\
&= \frac{p^2+2pq+q^2+pq}{p^2+2pq+q^2-5pq} \\
&= \frac{(p+q)^2+pq}{(p+q)^2-5pq} \\
&= \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2+1}{\left(\frac{2}{x}\right)^2-5} \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\
&= \frac{\frac{4}{x^2}+1}{\frac{4}{x^2}-5} \\
&= \frac{\frac{4+x^2}{x^2}}{\frac{4-5x^2}{x^2}} \\
&= \frac{4+x^2}{4-5x^2} \quad (\text{Ans})
\end{aligned}$$

❖ **নিজে কর:** $x = \frac{8pq}{p+q}$ হলে $\frac{x+4p}{x-4p} + \frac{x+4q}{x-4q}$ এর মান নির্ণয় কর।

Type-2

১) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

$$\text{বা, } \frac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}-1-\sqrt{1-x}} = \frac{1+3}{1-3}$$

$$\text{বা, } \frac{2}{-2\sqrt{1-x}} = \frac{4}{-2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{1-x} = 4 \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } 4(1-x) = 1$$

$$\text{বা, } 1-x = \frac{1}{4}$$

$$\text{বা, } -x = \frac{1}{4} - 1$$

$$\text{বা, } x = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\text{বা, } x = \frac{4-1}{4}$$

$$\therefore x = \frac{3}{4} \quad (\text{Ans})$$

২) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$; $2a > b > 0$ এবং $x \neq 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$

$$\text{বা, } \frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}+a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}-a-x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\text{বা, } \frac{2a+2x}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\text{বা, } \frac{2(a+x)}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\text{বা, } \frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\text{বা, } \frac{(a+x)^2}{(-\sqrt{a^2-x^2})^2} = \frac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$$

$$\text{বা, } \frac{a^2+2ax+x^2}{a^2-x^2} = \frac{b^2+2bx+x^2}{b^2-2bx+x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{a^2+2ax+x^2+a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2-a^2+x^2} = \frac{b^2+2bx+x^2+b^2-2bx+x^2}{b^2+2bx+x^2-b^2+2bx-x^2}$$

[যোজন-বিয়োজন]

$$\text{বা, } \frac{2a^2+2ax}{2x^2+2ax} = \frac{2b^2+2x^2}{4bx}$$

$$\text{বা, } \frac{2(a^2+ax)}{2(x^2+ax)} = \frac{2(b^2+x^2)}{2.2bx}$$

$$\text{বা, } \frac{a^2+ax}{x^2+ax} = \frac{b^2+x^2}{2bx}$$

$$\text{বা, } \frac{a(a+x)}{x(x+a)} = \frac{b^2+x^2}{2b.x}$$

$$\text{বা, } \frac{a(a+x)}{(x+a)} = \frac{b^2+x^2}{2b}$$

$$\text{বা, } a = \frac{b^2+x^2}{2b}$$

$$\text{বা, } 2ab = b^2 + x^2$$

$$\text{বা, } x^2 = 2ab - b^2$$

$$\therefore x = \sqrt{2ab - b^2} \quad (\text{Ans})$$

✧ নিজে কর:

i. $81 \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

ii. $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

Type-3

১) $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = p$ হলে প্রমাণ কর যে, $p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = p$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{p+1}{p-1}$$

$$\text{বা, } \frac{2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} = \frac{p+1}{p-1}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{p+1}{p-1}$$

$$\text{বা, } \frac{1+x}{1-x} = \frac{(p+1)^2}{(p-1)^2} \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{1+x}{1-x} = \frac{p^2+2p+1}{p^2-2p+1}$$

$$\text{বা, } \frac{1+x+1-x}{1+x-1+x} = \frac{p^2+2p+1+p^2-2p+1}{p^2+2p+1-p^2+2p-1}$$

$$\text{বা, } \frac{2}{2x} = \frac{2(p^2+1)}{4p}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{x} = \frac{p^2+1}{2p}$$

$$\text{বা, } p^2 + 1 - \frac{2p}{x} = 0$$

$$\therefore p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

২) $\frac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$ হলে প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$

$$\text{বা, } \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a-b+c} = a(a+b)$$

$$\text{বা, } \frac{a^2-ab+b^2}{a-b+c} = a \quad [\text{উভয়পক্ষকে } (a+b) \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\text{বা, } a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + ac$$

$$\text{বা, } b^2 = ac$$

$$\text{বা, } \frac{b \times b}{a} = c$$

$$\text{বা, } \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad [\text{ব্যস্তকরণ করে}]$$

$\therefore a, b, c$ ক্রমিক সমানুপাতী।

৩) $\frac{bx-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$ হলে,

ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

খ) দেখাও যে, $\frac{x^3}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} - \frac{z^3}{c^2} = \frac{(x-y-z)^3}{(a-b-c)^2}$

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $\frac{bx-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$

$$\text{বা, } \frac{abx-acy}{a^2} = \frac{bcx-abz}{b^2} = \frac{acv-bcx}{c^2}$$

* $\frac{\text{লবগুলোর যোগফল}}{\text{হরগুলোর যোগফল}}$

$$= \frac{abz - acy + bcx - abz + acy - bcx}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - abz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2}$$

$$\therefore \frac{abz - acy}{a^2} = 0$$

$$\text{বা, } abz - acy = 0$$

$$\text{বা, } abz = acy$$

$$\text{বা, } \frac{abz}{abc} = \frac{acy}{abc}$$

$$\therefore \frac{z}{c} = \frac{y}{b}$$

$$\text{আবার, } \frac{bcx - abz}{b^2} = 0$$

$$\text{বা, } bcx - abz = 0$$

$$\text{বা, } bcx = abz$$

$$\text{বা, } \frac{bcx}{abc} = \frac{abz}{abc}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

$$\text{ধ) মনে করি, } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$$

$$\therefore x = ak, y = bk, z = ck$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } L.H.S &= \frac{x^3}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} - \frac{z^3}{c^2} \\ &= \frac{(ak)^3}{a^2} - \frac{(bk)^3}{b^2} - \frac{(ck)^3}{c^2} \\ &= \frac{a^3 k^3}{a^2} - \frac{b^3 k^3}{b^2} - \frac{c^3 k^3}{c^2} \\ &= ak^3 - bk^3 - ck^3 \\ &= k^3(a - b - c) \end{aligned}$$

$$R.H.S = \frac{(x-y-z)^3}{(a-b-c)^2}$$

$$= \frac{(ak - bk - ck)^3}{(a - b - c)^2}$$

$$= k^3(a - b - c)$$

L.H.S = R.H.S (দেখানো হলো)

8) a, b, c, d চারটি রাশি এবং $a:b = c:d$ হলে দেখাও যে, $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a:b = c:d$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore a = bk$ এবং $c = dk$

$$L.H.S = \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$$

$$= \frac{(bk)^2+bk \cdot b+b^2}{(bk)^2-bk \cdot b+b^2}$$

$$= \frac{b^2k^2+b^2k+b^2}{b^2k^2-b^2k+b^2}$$

$$= \frac{b^2(k^2+k+1)}{b^2(k^2-k+1)}$$

$$= \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$R.H.S = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$$

$$= \frac{(dk)^2+dk \cdot d+d^2}{(dk)^2-dk \cdot d+d^2}$$

$$= \frac{d^2k^2+d^2k+d^2}{d^2k^2-d^2k+d^2}$$

$$= \frac{d^2(k^2+k+1)}{d^2(k^2-k+1)}$$

$$= \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

L.H.S = R.H.S (প্রমাণিত)

৫) $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে দেখাও যে, $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b} + \sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b} - \sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b}} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন}]$$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$$

$$\text{বা, } \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}\right)^2 \quad [\text{উভয়পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{2a+3b}{2a-3b}$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1} = \frac{2a+3b+2a+3b}{2a+3b-2a+3b} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন}]$$

$$\text{বা, } \frac{2x^2+2}{4x} = \frac{4a}{6b}$$

$$\text{বা, } \frac{2(x^2+1)}{4x} = \frac{2a}{3b}$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+1}{2x} = \frac{2a}{3b}$$

$$\text{বা, } 3b(x^2+1) = 4ax$$

$$\therefore 3bx^2 - 4ax + 3b = 0 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

✧ নিজে কর:

i. $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতিক।

ii. $p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $p = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

iii. $lx = my = nz$ হলে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$

Type-4

১) একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5:12:13 এবং পরিসীমা 30 সে.মি. হলে বৃহত্তর বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5:12:13 এবং পরিসীমা 30 সে.মি.

মনে করি, বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য $5x$ সে.মি., $12x$ সে.মি. এবং $13x$ সে.মি.

$$\text{প্রথমতে, } 5x + 12x + 13x = 30$$

$$\text{বা, } 30x = 30$$

বা, $x = 1$

∴ বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5, 12, 13

প্রশ্নমতে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 13 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.

আয়তক্ষেত্রের আনুপাতিক চিত্র:

$$\begin{aligned}\therefore \text{কর্ণ } AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{13^2 + 5^2} \text{ সে.মি.} \\ &= \sqrt{169 + 25} \text{ সে.মি.} \\ &= \sqrt{194} \text{ সে.মি.}\end{aligned}$$

প্রশ্নমতে, বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{194}$ সে.মি.

$$\begin{aligned}\therefore \text{ক্ষেত্রফল} &= (\sqrt{194})^2 \text{ বর্গ সে.মি.} \\ &= 194 \text{ বর্গ সে.মি.}\end{aligned}$$

২) একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ r একক

এবং বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য a একক

$$\therefore \text{বৃত্তটির ক্ষেত্রফল} = \pi r^2 \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{এবং বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = a^2 \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \pi r^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\pi r^2}$$

$$\Rightarrow a = r\sqrt{\pi}$$

আবার, বৃত্তটির পরিসীমা $= 2\pi r$ বর্গ একক

এবং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= 4a$ বর্গ একক

তাহলে, বৃত্তটির পরিসীমা : বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা

$$\begin{aligned}&= 2\pi r : 4a \\ &= 2\pi r : 4 \times r\sqrt{\pi} \\ &= \pi : 2\sqrt{\pi} \quad (\text{Ans})\end{aligned}$$

∴ নিজে কর:

একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3:4 এবং 2:5 হলে অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

Type-5

১) দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3:4 এবং এদের ল.সা.গু. 180 হলে সংখ্যা দুটির গ.সা.গু. এবং সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, দুইটি সংখ্যার অনুপাত = 3:4

মনে করি, একটি সংখ্যা = $3x$ এবং অপর সংখ্যাটি = $4x$

$3x$ ও $4x$ এর গ.সা.গু. = x

এবং $3x$ ও $4x$ এর ল.সা.গু. = $12x$

প্রশ্নমতে, $12x = 180$

$$\begin{aligned}\text{বা, } x &= \frac{180}{12} \\ &= 15\end{aligned}$$

∴ সংখ্যা দুটির গ.সা.গু. = 15

একটি সংখ্যা = $3 \times 15 = 45$

এবং অপর একটি সংখ্যা = $4 \times 15 = 60$ (Ans)

∴ নিজে কর:

দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5:7 এবং এদের গ.সা.গু. 4 হলে সংখ্যা দুটির ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

Type-6

১) একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x ও প্রস্থ y হলে উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি পেলে এবং প্রস্থ 10% হ্রাস পেলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x মি.

এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ y মি.

∴ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল xy বর্গমিটার

নতুন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = $(x + x$ এর 10%) মি.

$$= \left(x + \frac{10x}{100}\right) \text{ মি.}$$

$$= \frac{100x + 10x}{100} \text{ মি.}$$

সাধারণ গণিত - অধ্যায় ১১ - বীজগাণিতিক অনুপাত ও সমানুপাত

$$= \frac{110x}{100} \text{ মি.}$$

$$= \frac{11x}{10} \text{ মি.}$$

10% হ্রাস পাওয়ায়,

নতুন আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = $(y - y \text{ এর } 10\%) \text{ মি.}$

$$= \left(y - \frac{10y}{100}\right) \text{ মি.}$$

$$= \frac{100y - 10y}{100} \text{ মি.}$$

$$= \frac{90y}{100} \text{ মি.}$$

$$= \frac{9y}{10} \text{ মি.}$$

∴ নতুন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\left(\frac{11x}{10} \times \frac{9y}{10}\right)$ বর্গমিটার

$$= \frac{99xy}{100} \text{ বর্গমিটার}$$

যেহেতু $xy > \frac{99xy}{100}$

∴ ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় = $\left(xy - \frac{99xy}{100}\right)$ বর্গমিটার

$$= \frac{100xy - 99xy}{100} \text{ বর্গমিটার}$$

$$= \frac{xy}{100} \text{ বর্গমিটার}$$

∴ ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস পায় = $\left(\frac{\frac{xy}{100}}{xy} \times 100\right)\% = 1\% \text{ (Ans)}$

২) একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান: মনেকরি, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য x টাকা।

তাহলে, ক্ষতি = x এর 28%

$$= x \text{ এর } \frac{28}{100} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{28x}{100} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{7x}{25} \text{ টাকা}$$

∴ বিক্রয়মূল্য = $\left(x - \frac{7x}{25}\right)$ টাকা

সাধারণ গণিত - অধ্যায় ১১ - বীজগাণিতিক অনুপাত ও সমানুপাত

$$= \frac{18x}{25} \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{বিক্রয়মূল্য} : \text{ক্রয়মূল্য} = \frac{18x}{25} : x$$

$$= \frac{18}{25} : 1$$

$$= 18 : 25 \quad (\text{Ans})$$

❖ নিজে কর:

- যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 20% বৃদ্ধি পায়, তবে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?
- সাজু ও রাজুর ঋণের অনুপাত 15000:12000। তারা 10% হারে ঋণ গ্রহণ করে। 3 বছর পর রাজু সকল মুনাফা আসনের অর্ধেক শোধ করলো। রাজুর আর কত টাকা ঋণ থাকলো?

Type-7

১) পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। তাদের বয়সের অনুপাত 7 বছর পূর্বে ছিল 5:2। 6 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

সমাধান: মনেকরি, 7 বছর পূর্বে পিতার বয়স ছিল $5x$ বছর

এবং 7 বছর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল $2x$ বছর

পিতার বর্তমান বয়স $(5x + 7)$ বছর

পুত্রের বর্তমান বয়স $(2x + 7)$ বছর

$$\text{প্রশ্নমতে, } (5x + 7) + (2x + 7) = 70$$

$$\Rightarrow 5x + 7 + 2x + 7 = 70$$

$$\Rightarrow 7x + 14 = 70$$

$$\Rightarrow 7x = 70 - 14$$

$$\Rightarrow 7x = 56$$

$$\Rightarrow x = 8$$

পিতার বর্তমান বয়স $(5 \times 8 + 7)$ বছর = 47 বছর

পুত্রের বর্তমান বয়স $(2 \times 8 + 7)$ বছর = 23 বছর

\therefore 6 বছর পরে পিতার বয়স $(47 + 6)$ বছর = 53 বছর

6 বছর পরে পুত্রের বয়স $(23 + 6)$ বছর = 29 বছর (Ans)

❖ নিজে কর:

রোজ ও তার পিতার বর্তমান বয়সের অনুপাত 7:2। 5 বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত 8:3 হবে। রোজ ও তার পিতার বয়স 9 বছর পর কত হবে?

Type-8 (ধারাবাহিক অনুপাত)

১) একটি ত্রিভুজের তিন কোণের অনুপাত 3:4:5, কোণ তিনটি ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত অনুপাত অনুসারে কোণ তিনটি যথাক্রমে $3x, 4x, 5x$ । ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $= 180^\circ$

প্রমানুসারে, $3x + 4x + 5x = 180^\circ$

$$\Rightarrow 12x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = 15^\circ$$

অতএব, কোণ তিনটি হলো:

$$3x = 3 \times 15^\circ = 45^\circ$$

$$4x = 4 \times 15^\circ = 60^\circ$$

$$5x = 5 \times 15^\circ = 75^\circ \quad (\text{Ans})$$

২) ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাহরাফি 171 রান করলো। সাকিব ও মুশফিকুরের এবং মুশফিকুর ও মাহরাফির রানের অনুপাত 3:2 হলে কে কত রান করেছে?

সমাধান: দেওয়া আছে, মোট রানের পরিমাণ = 171

এবং সাকিবের রান : মুশফিকুরের রান = 3:2

$$= 3 \times 3 : 2 \times 3 \quad [3 \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$= 9:6$$

আবার, মুশফিকুরের রান : মাহরাফির রান = 3:2

$$= 3 \times 2 : 2 \times 2 \quad [2 \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$= 6:4$$

এখন সাকিবের রান : মুশফিকুরের রান : মাহরাফির রান = 9:6:4

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = $9 + 6 + 4 = 19$

$$\therefore \text{সাকিবের রান} = \left(171 \text{ এর } \frac{9}{19}\right) = 81 \text{ রান}$$

$$\text{মুশফিকুরের রান} = \left(171 \text{ এর } \frac{6}{19}\right) = 54 \text{ রান}$$

$$\text{মাহরাফির রান} = \left(171 \text{ এর } \frac{4}{19}\right) = 36 \text{ রান}$$

∴ সাকিব, মুশফিকুর ও মাহরাফির রান যথাক্রমে 81, 54, 36

(Ans)

∴ নিজে কর:

- 10 বছর পূর্বে পিতা, ছেলে ও মায়ের বয়সের অনুপাত ছিল 5:2:4। বর্তমানে পিতার বয়স, পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ। মায়ের বর্তমান বয়স কত?
- ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5:12:13 এবং পরিসীমা 20 সেন্টিমিটার। বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3:4 এবং 2:5 হলে অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

প্রশ্ন-০১:

দৃশ্যকল্প-১: $P = \log 5 + 16(\log 16 - \log 15) + 12(\log 25 - \log 24) + 7(\log 81 - \log 80)$

দৃশ্যকল্প-২: আলম, বশির, চিন্ময় ও দ্বৈত মোট 195000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে এবং এক বছর শেষে 26500 টাকা লাভ হয়। উক্ত ব্যবসার মূলধনের আলমের অংশ : বশিরের অংশ = $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, বশিরের অংশ : চিন্ময়ের অংশ = 4:5 এবং চিন্ময়ের অংশ দ্বৈতের অংশ = 5:6। বছর শেষে লভ্যাংশের 60% উক্ত ব্যবসায় বিনিয়োগ করা হলো। অবশিষ্ট লভ্যাংশ তাদের মধ্যে বন্টন করা হলো।

ক) আলম, বশির, চিন্ময় ও দ্বৈতের মূলধনের সরল অনুপাত নির্ণয় কর।

খ) ব্যবসায় আলম কত টাকা বিনিয়োগ করেছিল? অবশিষ্ট লভ্যাংশ থেকে আলম কত পাবে?

গ) দৃশ্যকল্প-১ হতে P এর সরল মান নির্ণয় কর।

১ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) ব্যবসার মূলধনে আলমের অংশ : বশিরের অংশ

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times 6 : \frac{1}{2} \times 6 \\ &= 2 : 3 = 2 \times 4 : 3 \times 4 = 8 : 12 \end{aligned}$$

বশিরের অংশ : চিন্ময়ের অংশ = 4:5 = 4 × 3 : 5 × 3 = 12:15

চিন্ময়ের অংশ : দ্বৈতের অংশ = 5:6 = 5 × 3 : 6 × 3 = 15:18

∴ আলম, বশির, চিন্ময় ও দ্বৈতের মূলধনের সরল অনুপাত = 8:12:15:18 (Ans)

খ) দেওয়া আছে, ব্যবসায় বিনিয়োগকৃত মোট মূলধন = 195000 টাকা

$$\begin{aligned} \text{ব্যবসায় আলম বিনিয়োগ করেছিল} &= 195000 \text{ এর } \frac{8}{8+12+15+18} \text{ টাকা} \\ &= 195000 \times \frac{8}{53} \text{ টাকা} \\ &= 29433.96 \text{ টাকা} \\ &= 29434 \text{ টাকা (প্রায়)} \quad \text{(Ans)} \end{aligned}$$

বছর শেষে লভ্যাংশ 26500 টাকা এবং এর (100 - 60) বা 40% বিনিয়োগকারীদের মধ্যে বন্টন করা হলে

$$\text{আলম পাবে} = (26500 \text{ এর } 40\%) \text{ এর } \frac{8}{8+12+15+18} \text{ টাকা}$$

$$= 10600 \text{ এর } \frac{8}{55} \text{ টাকা}$$

$$= 1600 \text{ টাকা} \quad (\text{Ans})$$

$$গ) P = \log 5 + 16(\log 16 - \log 15) + 12(\log 25 - \log 24) + 7(\log 81 - \log 80)$$

$$= \log 5 + 16 \log \frac{16}{15} + 12 \log \frac{25}{24} + 7 \log \frac{81}{80}$$

$$= \log 5 + \log \left(\frac{16}{15}\right)^{16} + \log \left(\frac{25}{24}\right)^{12} + \log \left(\frac{81}{80}\right)^7$$

$$= \log \left\{ 5 \cdot \frac{(2^4)^{16}}{(3 \cdot 5)^{16}} \cdot \frac{(5^2)^{12}}{(3 \cdot 2^3)^{12}} \cdot \frac{(3^4)^7}{(2^4 \cdot 5)^7} \right\}$$

$$= \log \left\{ 5 \cdot \frac{2^{64}}{3^{16} \cdot 5^{16}} \cdot \frac{5^{24}}{3^{12} \cdot 2^{36}} \cdot \frac{3^{28}}{2^{28} \cdot 5^7} \right\}$$

$$= \log \left\{ \frac{2^{64} \cdot 5^{24} \cdot 3^{28}}{2^{64} \cdot 3^{28} \cdot 5^{23}} \right\}$$

$$= \log(5^2)$$

$$= 2 \log 5 \quad (\text{Ans})$$

প্রশ্ন-০২:

$$ax = by = cz$$

ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = \frac{xz}{y^2} + \frac{zy}{x^2} + \frac{xy}{z^2}$

খ) প্রমাণ কর যে, $(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)$

গ) দেখাও যে, $\frac{x+y+z}{ax+by+cz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

২ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) মনে করি, $ax = by = cz = k$

তাহলে, $ax = k \quad by = k \quad cz = k$

$$\therefore a = \frac{k}{x} \quad \therefore b = \frac{k}{y} \quad \therefore c = \frac{k}{z}$$

$$L.H.S = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$$

$$= \frac{\left(\frac{k}{x}\right)^2}{\frac{k}{y} \cdot \frac{k}{z}} + \frac{\left(\frac{k}{y}\right)^2}{\frac{k}{z} \cdot \frac{k}{x}} + \frac{\left(\frac{k}{z}\right)^2}{\frac{k}{x} \cdot \frac{k}{y}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{k^2}{yz}}{\frac{k^2}{yz}} + \frac{\frac{k^2}{zx}}{\frac{k^2}{zx}} + \frac{\frac{k^2}{xy}}{\frac{k^2}{xy}} \\
&= \frac{k^2}{yz} \times \frac{yz}{k^2} + \frac{k^2}{zx} \times \frac{zx}{k^2} + \frac{k^2}{xy} \times \frac{xy}{k^2} \\
&= \frac{yz}{yz} + \frac{zx}{zx} + \frac{xy}{xy} = R.H.S
\end{aligned}$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

$$\therefore \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} \quad (\text{Proved})$$

খ) মনে করি, $ax = by = cz = k$

$$\text{তাহলে, } ax = k \quad by = k \quad cz = k$$

$$\therefore a = \frac{k}{x} \quad \therefore b = \frac{k}{y} \quad \therefore c = \frac{k}{z}$$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \\
&= \left\{ \left(\frac{k}{x} \right)^2 + \left(\frac{k}{y} \right)^2 + \left(\frac{k}{z} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{k}{x} \right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{k}{y} \right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{k}{z} \right)^2} \right\} \\
&= \left\{ \frac{k^2}{x^2} + \frac{k^2}{y^2} + \frac{k^2}{z^2} \right\} \times \left\{ \frac{1}{\frac{k^2}{x^2}} + \frac{1}{\frac{k^2}{y^2}} + \frac{1}{\frac{k^2}{z^2}} \right\} \\
&= \left\{ \frac{k^2}{x^2} + \frac{k^2}{y^2} + \frac{k^2}{z^2} \right\} \times \left\{ \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2} \right\} \\
&= k^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \cdot \frac{1}{k^2} (x^2 + y^2 + z^2) \\
&= (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) = R.H.S
\end{aligned}$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

$$\therefore (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \quad (\text{Proved})$$

গ) মনে করি, $ax = by = cz = k$

$$\text{তাহলে, } ax = k \quad by = k \quad cz = k$$

$$\therefore x = \frac{k}{a} \quad \therefore y = \frac{k}{b} \quad \therefore z = \frac{k}{c}$$

$$\begin{aligned}
 L.H.S &= \frac{x+y+z}{ax+by+cz} \\
 &= \frac{\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c}}{a \cdot \frac{k}{a} + b \cdot \frac{k}{b} + c \cdot \frac{k}{c}} \\
 &= \frac{k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}{k+k+k} \\
 &= \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = R.H.S
 \end{aligned}$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

$$\therefore \frac{x+y+z}{ax+by+cz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (\text{Showed})$$

প্রশ্ন-০৩:

$$y = \frac{14mn}{m+n} \text{ এবং } p:q = q:r$$

ক) দেখাও যে, $\frac{p}{r} = \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2}$

খ) প্রমাণ কর যে, $p^4q^4r^4 \left(\frac{1}{p^6} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{r^6} \right) = p^6 + q^6 + r^6$

গ) $\frac{y+7m}{y-7m} + \frac{y+7n}{y-7n}$ এর মান নির্ণয় কর। $m \neq n$

৩ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) দেওয়া আছে, $p:q = q:r$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{q}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{q^2}{r^2}$$

[উভয়পক্ষে বর্গ করে]

$$\Rightarrow \frac{p^2+q^2}{q^2} = \frac{q^2+r^2}{r^2}$$

[যোজন করে]

$$\Rightarrow \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2} = \frac{q^2}{r^2}$$

[একান্তরকরণ করে]

$$\Rightarrow \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2} = \frac{pr}{r^2}$$

[$\because \frac{p}{q} = \frac{q}{r} \therefore pr = q^2$]

$$\Rightarrow \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2} = \frac{p}{r}$$

$$\therefore \frac{p}{r} = \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2} \quad (\text{Showed})$$

খ) দেওয়া আছে, $p:q = q:r$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{q}{r}$$

$$\therefore q^2 = pr$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= p^4 q^4 r^4 \left(\frac{1}{p^6} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{r^6} \right) \\ &= \frac{p^4 q^4 r^4}{p^6} + \frac{p^4 q^4 r^4}{q^6} + \frac{p^4 q^4 r^4}{r^6} \\ &= \frac{q^4 r^4}{p^2} + \frac{p^4 r^4}{q^2} + \frac{p^4 q^4}{r^2} \\ &= \frac{(pr)^2 r^4}{p^2} + \frac{(q^2)^4}{q^2} + \frac{p^4 (pr)^2}{r^2} \\ &= r^6 + q^6 + p^6 \\ &= p^6 + q^6 + r^6 = R.H.S \end{aligned}$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

$$\therefore p^4 q^4 r^4 \left(\frac{1}{p^6} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{r^6} \right) = p^6 + q^6 + r^6 \quad (\text{Proved})$$

গ) দেওয়া আছে, $y = \frac{14mn}{m+n}$

$$\text{বা, } \frac{y}{7m} = \frac{2n}{m+n}$$

$$\text{বা, } \frac{y+7m}{y-7m} = \frac{2n+m+n}{2n-n-m} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন}]$$

$$\text{বা, } \frac{y+7m}{y-7m} = \frac{3n+m}{n-m} \dots \dots (i)$$

$$\text{আবার, } y = \frac{14mn}{m+n}$$

$$\text{বা, } \frac{y}{7n} = \frac{2m}{m+n}$$

$$\text{বা, } \frac{y+7n}{y-7n} = \frac{2m+m+n}{2m-m-n} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন}]$$

$$\text{বা, } \frac{y+7n}{y-7n} = \frac{3m+n}{m-n} \dots \dots (ii)$$

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$\begin{aligned}\frac{y+7n}{y-7n} + \frac{y+7m}{y-7m} &= \frac{3n+m}{n-m} + \frac{3m+n}{m-n} \\ &= \frac{3n+m}{n-m} - \frac{3m+n}{n-m} \\ &= \frac{3n+m-3m-n}{n-m} \\ &= \frac{2n-2m}{n-m} \\ &= \frac{2(n-m)}{n-m} = 2 \quad (\text{Ans})\end{aligned}$$

প্রশ্ন-০৪:

(i) $y^2 = xz$ (ii) $p = 26$ মিটার এবং $q = 10$ মিটার

ক) (i) হতে দেখাও যে, $\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3} = 1$

খ) $\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2} = \frac{(x+y)^2}{(y+z)^2}$ হলে, উল্লিখকের আলোকে (i) নং প্রতিষ্ঠিত কর।

গ) যদি p ও q এর মানকে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বিবেচনা করা হয়, তবে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 20% হ্রাস পেলে ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে তা নির্ণয় কর।

৪ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) দেওয়া আছে, $y^2 = xz$

$$\begin{aligned}L.H.S &= \frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3} \\ &= \frac{xz.y(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3} \\ &= \frac{y^2.y(x+y+z)^3}{(xy+yz+y^2)^3} \quad [\because y^2 = zx] \\ &= \frac{y^3(x+y+z)^3}{y^3(x+y+z)^3} \\ &= 1 = R.H.S\end{aligned}$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

$$\therefore \frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3} = 1 \quad (\text{Proved})$$

খ) দেওয়া আছে, $\frac{x^2 + y^2}{y^2 + z^2} = \frac{(x+y)^2}{(y+z)^2}$

$$\Rightarrow \frac{(y+z)^2}{y^2 + z^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} \quad [\text{একান্তরকরণ করে}]$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 + 2yz + z^2}{y^2 + z^2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 + 2yz + z^2 - y^2 - z^2}{y^2 + z^2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad [\text{বিয়োজন করে}]$$

$$\Rightarrow \frac{2yz}{y^2 + z^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{y^2 + z^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow xy^2 + xz^2 = x^2z + y^2z$$

$$\Rightarrow xz^2 - x^2z = y^2z - xy^2$$

$$\Rightarrow xz(z - x) = y^2(z - x)$$

$$\Rightarrow xz = y^2$$

$$\therefore y^2 = xz \quad (\text{Proved})$$

গ) এখানে, দৈর্ঘ্য $p = 26$ মিটার, প্রস্থ $q = 10$ মিটার

$$10\% \text{ বৃদ্ধিতে দৈর্ঘ্য} = \left(26 + 26 \times \frac{10}{100}\right) \text{ মি.} = 28.6 \text{ মি.}$$

$$20\% \text{ হ্রাসে প্রস্থ} = \left(10 - 10 \times \frac{20}{100}\right) \text{ মি.} = 8 \text{ মি.}$$

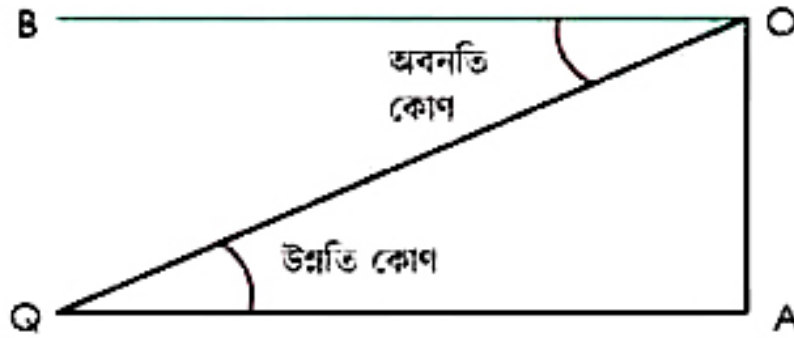
$$\text{পূর্বের ক্ষেত্রফল} = 26 \times 10 \text{ বর্গ মি.} = 260 \text{ বর্গ মি.}$$

$$\text{নতুন ক্ষেত্রফল} = 28.6 \times 8 \text{ বর্গ মি.} = 228.8 \text{ বর্গ মি.}$$

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল হ্রাস} = (260 - 228.8) \text{ বর্গ মি.} = 31.2 \text{ বর্গ মি.}$$

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস} = \frac{31.2}{260} \times 100\% = 12\% \quad (\text{Ans})$$

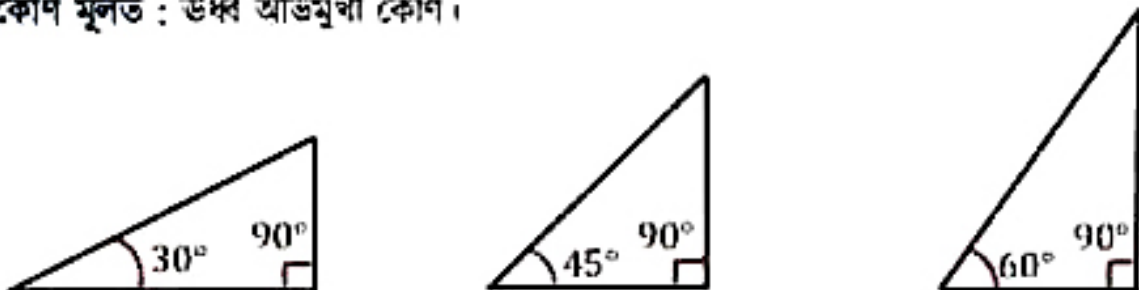
MAIN TOPIC



- ভূ রেখা বা সয়নরেখা বা আনুভূমিক রেখা : ভূমি তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখাকে ভূ রেখা বলে। ভূ রেখাকে সয়নরেখাও বলে। চিত্রে GA হলো একটি ভূ রেখা।
- উর্ধ্বরেখা বা উলম্বরেখা : ভূমি তলের উপর লম্ব যেকোনো সরলরেখাকে উলম্বরেখা বলে। OA হলো উলম্বরেখা
- উলম্বতল : ভূমি তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরছেদী ভূ-রেখা ও উর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে। এ তলকে উলম্বতল বলে। চিত্রে OAO তলটি ভূমির উপর লম্ব বা উলম্ব তল।
- উন্নতি কোণ : ভূতলের উপরের কোন বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে উন্নতি কোণ বলা হয়। এখানে, O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle POB$ ।
- অবনতি কোণ : ভূতলের সমান্তরাল রেখার নিচের কোনো বিন্দু ভূ-রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে অবনতি কোণ বলে।

চিত্রে, O বিন্দুতে Q বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle QOB$ ।

- অবনতি কোণ মূলত : নিম্ন অভিমুখী কোণ।
- উন্নতি কোণ মূলত : উর্ধ্ব অভিমুখী কোণ।



১. 30° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি $>$ লম্ব হবে
২. 60° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি $=$ লম্ব হবে
৩. 60° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি $<$ লম্ব হবে

$$\square \sin \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$$

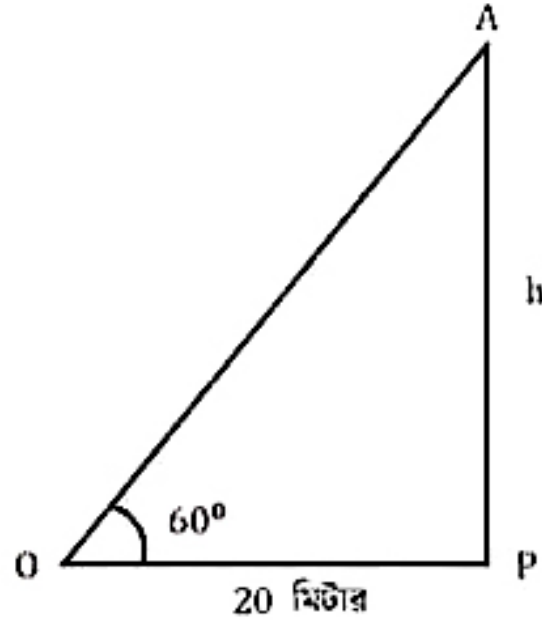
$$\square \cos \theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\square \tan \theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$$

Type-1

প্রশ্ন-১: একটি গাছের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোনো গাছের চূড়ায় উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



মনে করি, গাছের উন্নতি কোণ $\angle POA = 60^\circ$ এবং গাছের পাদদেশ থেকে ভূতলের O বিন্দুর দূরত্ব $PO = 20$ মিটার

এবং গাছের উচ্চতা $AP = h$ মিটার

$$\text{এখন, } \tan \angle POA = \frac{AP}{OP}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{h}{20}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{h}{20} \quad [\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}]$$

$$\text{বা, } h = 20\sqrt{3}$$

$$\therefore h = 34.641 \text{ মিটার (প্রায়)}$$

\therefore গাছটির উচ্চতা 34.641 মিটার (প্রায়) [Ans.]

প্রশ্ন-২: 18 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

মনে করি ,

দেওয়ালের উচ্চতা $AB = h$ মিটার।

মইয়ের দৈর্ঘ্য , $OB = 18$ মিটার

এবং $\angle AOB = 45^\circ$

এখন , OAB সমকোণী ত্রিভুজ ,

$$\sin \angle AOB = \frac{AB}{OB}$$

$$\text{বা, } \sin 45^\circ = \frac{h}{18}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{18} \left[\because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

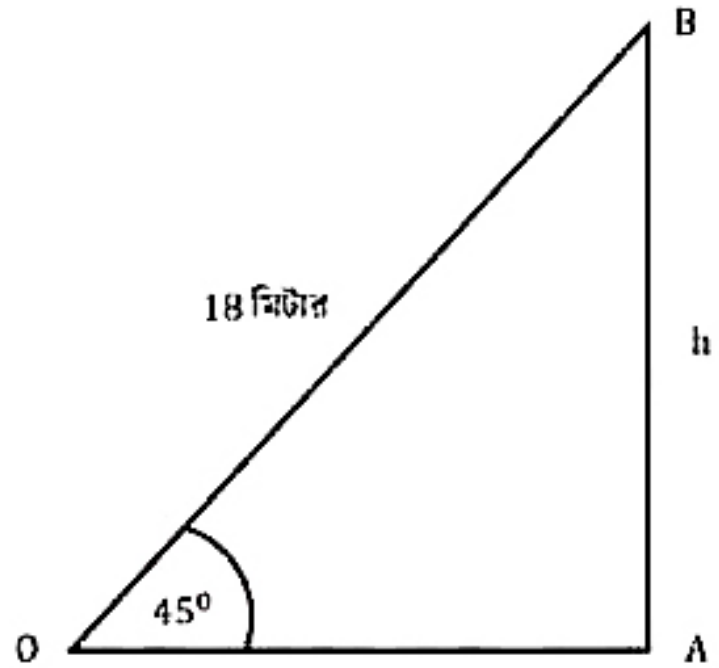
$$\text{বা, } h = \frac{18}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{18 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= 9\sqrt{2}$$

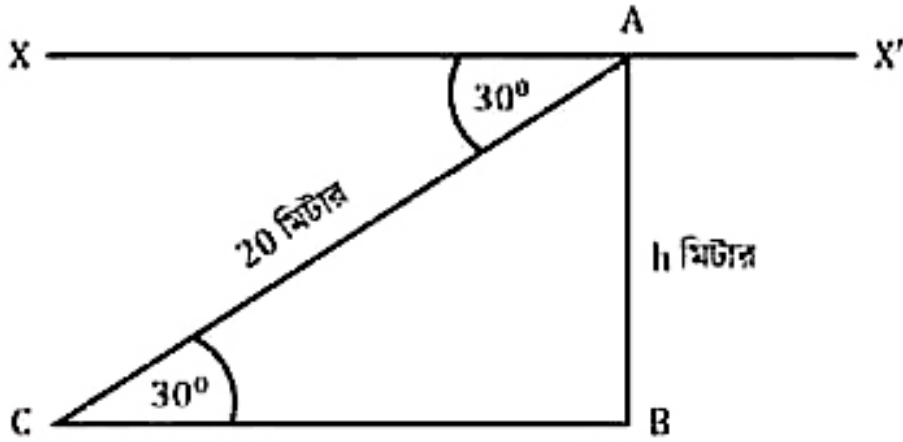
$$\therefore h = 12.728 \text{ মিটার (প্রায়)।}$$

$$\therefore \text{দেওয়ালটির উচ্চতা } 12.728 \text{ মিটার (প্রায়) [Ans.]}$$



প্রশ্ন-৩: একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



মনে করি, ঘরটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার, ঘরের ছাদের কোনো বিন্দু A থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দু C বিন্দুর $\angle CAX = 30^\circ$ ।

$XA \parallel BC$ এবং AC উহাদের ছেদক।

সুতরাং $\angle XAC = \angle ACB = 30^\circ$ [একান্তের কোণ বলে]

ABC সমকোণী ত্রিভুজ, $\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$

$$\text{বা, } \sin 30^\circ = \frac{h}{20}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{h}{20} \left[\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{বা, } 2h = 20$$

$$\therefore h = 10 \text{ মিটার}$$

ঘরটির উচ্চতা 10 মিটার। [Ans.]

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+32} \left[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\text{বা, } x + 32 = h\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } x + 32 = x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \quad [(i) \text{ নং হয়ে } h \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } x + 32 = 3x$$

$$\text{বা, } 3x - x = 32$$

$$\text{বা, } 2x = 32$$

$$\text{বা, } x = \frac{32}{2}$$

$$\therefore x = 16$$

$$(i) \text{ নং হতে, } h = x\sqrt{3} = 16 \times \sqrt{3}$$

$$\therefore h = 27.713 \text{ মিটার (প্রায়)}$$

সুতরাং, টাওয়ারের উচ্চতা 27.713 মিটার (প্রায়) এবং নদীর বিস্তার 16 মিটার। [Ans.]

Type-3

প্রশ্ন-১: 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, AB খুঁটি h উচ্চতায় C বিন্দুতে ভাঙে। ভাঙা অংশ BC সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমিতে D বিন্দুতে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

এখানে, $AB = 64$ মিটার

$$\angle ADC = 60^\circ$$

$$AC = h \text{ (ধরি)}$$

$$\therefore BC = 64 - h = CD$$

ADC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$$\sin \angle ADC = \frac{AC}{CD}$$

$$\text{বা, } \sin 60^\circ = \frac{h}{64-h}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{64-h} \quad \left[\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

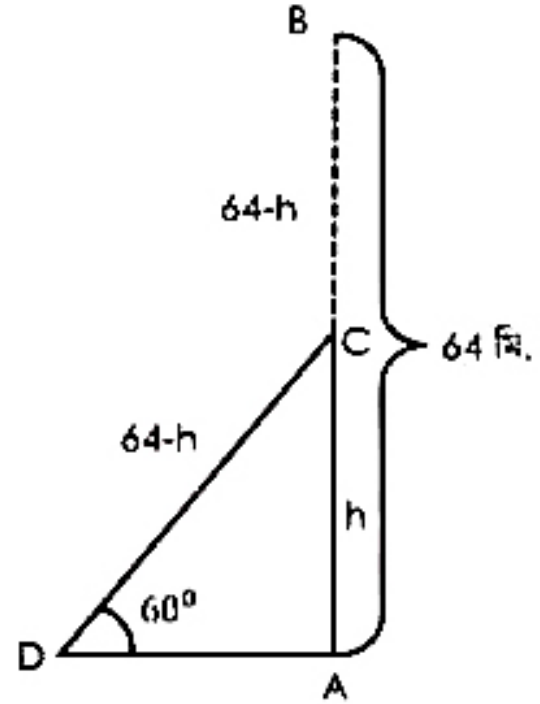
$$\text{বা, } 2h = 64\sqrt{3} - \sqrt{3}h \text{ [আড়গুনন করে]}$$

$$\text{বা, } 2h + \sqrt{3}h = 64\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h(2 + \sqrt{3}) = 64\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = \frac{64\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})} = \frac{64\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{128\sqrt{3}-192}{4-3}$$

$$\therefore h = 29.703 \text{ মিটার (প্রায়)}$$



Type-2

প্রশ্ন-১: একটি নদীর তীরে কোনো এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অনঙ্কিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60° । ঐ স্থান থেকে 32 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা $AB = h$ মিটার

এবং নদীর বিস্তার, $BP = x$ মিটার

টাওয়ারের উন্নতি $\angle BPA = 60^\circ$ এবং ঐ স্থান থেকে $PO = 32$ মিটার পিছিয়ে গেলে শীর্ষের উন্নতি $\angle AOB = 30^\circ$ হয়।

$\therefore BO = (BP + PO) = (x + 32)$ মিটার।

ΔAPB হতে পাই,

$$\tan \angle BPA = \frac{AB}{BP}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$

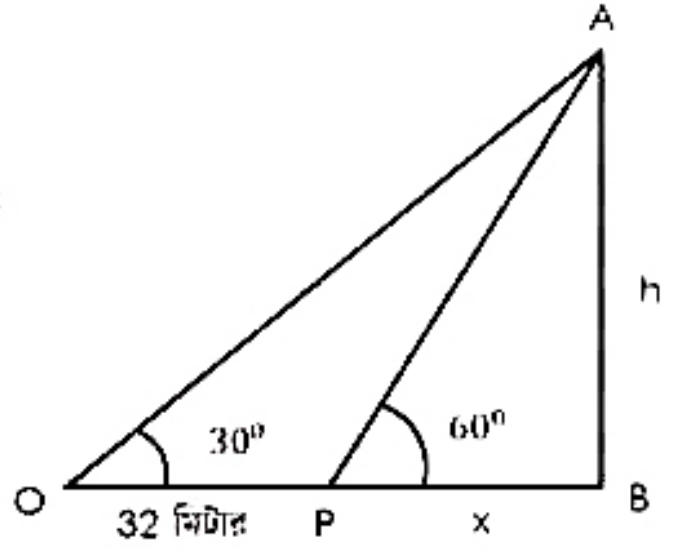
$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{h}{x} \quad [\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}]$$

$$\text{বা, } h = x\sqrt{3} \dots \dots \dots (i)$$

এখন, ΔAOB হতে পাই,

$$\tan \angle AOB = \frac{AB}{OB}$$

$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{h}{x+32}$$



$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{12}{BD}$$

$$\text{বা, } BD = 12\sqrt{3}$$

$$\therefore BD = 20.785 \text{ মি. (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য, } AB = AD + BD$$

$$= CD + BD \quad (\because AD = CD)$$

$$= (24 + 20.785) \text{ মিটার}$$

$$= 44.785 \text{ মি. (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় দৈর্ঘ্য } 44.785 \text{ মিটার (প্রায়)। [Ans.]}$$

∴ খুঁটিটির ভাঙ্গা অংশের দৈর্ঘ্য, $(64 - h) - (64 - 29.703) = 34.297$ মিটার

∴ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 34.297 মিটার (প্রায়)। [Ans.]

প্রশ্ন-২: একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙ্গে গেল যে, ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, AB একটি গাছ, তা ঝড়ে D বিন্দুতে ভেঙ্গে দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে।

অর্থাৎ $\angle BDC = 30^\circ$ এবং $AD = CD$

এবং গাছের গোড়া থেকে মাটির স্পর্শ বিন্দুর দূরত্ব,

$BC = 12$ মিটার

এখন, $\triangle BDC$ -এ,

$$\sin \angle BDC = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\text{বা, } \sin 30^\circ = \frac{BC}{CD}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{12}{CD}$$

$$\text{বা, } CD = 12 \times 2$$

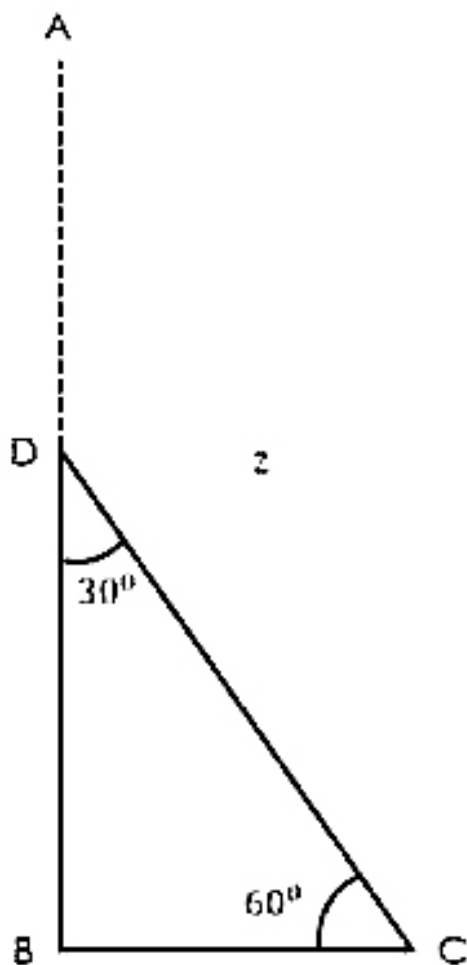
$$\therefore CD = 24 \text{ মি.}$$

আবার,

$$\tan \angle BDC = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$$

$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$$

সামান্য গণিত - অধ্যায় ১০ - দূরত্ব ও উচ্চতা

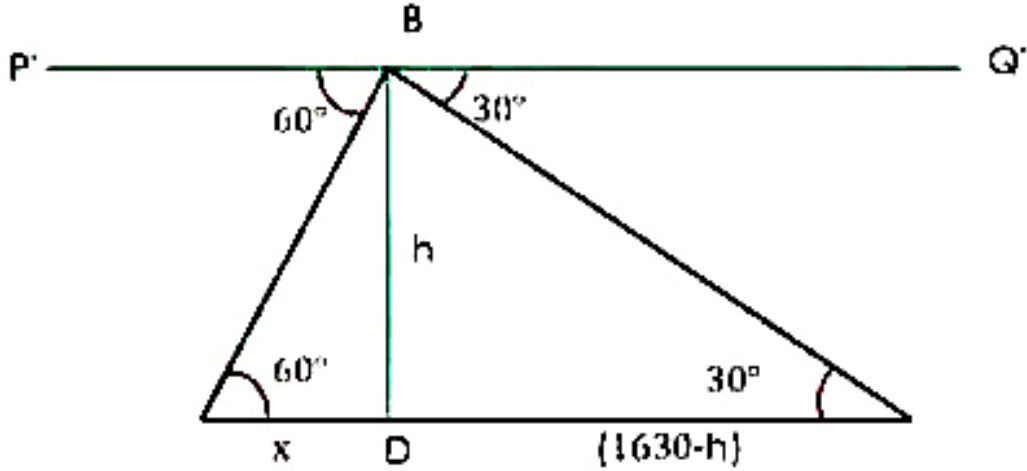


Type-4

প্রশ্ন-১: একটি বেলুন দুইটি মাইলপোস্ট P ও Q এর মাঝখানে উড়ছে। বেলুনের স্থানে মাইলপোস্ট দুটি ও এর অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° । জুমি হতে বেলুন দুটির উচ্চতা কত নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

মনে করি, O বেলুনের অবস্থান,



P ও Q এক মাইল দূরবর্তী দুটি পোস্ট। O হতে P ও Q এর অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° ।

$PQ \parallel P'Q'$ এবং $OD \perp PQ$

$$\therefore \angle P'OP = \angle OPD = 60^\circ \text{ ও } \angle Q'OQ = \angle OQD = 30^\circ$$

$$PQ = 1 \text{ মাইল} = 1.61 \text{ কি.মি.} = 1610 \text{ মি.}$$

ধরি,

$$PD = x \text{ মি.}$$

$$DQ = PQ - PD$$

$$= 1610 - x$$

বেলুনের উচ্চতা $OD = h$ মি.

এখন,

OPD সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\tan \angle OPD = \frac{OD}{PD}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\text{বা, } x = \frac{h}{3}$$

আবার, OQD সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\tan \angle OQD = \frac{OD}{QD}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{h}{1610 - x}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{1610 - h}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}h = 1610 - x$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}h = 1610 - \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}h + \frac{h}{\sqrt{3}} = 1610$$

$$\text{বা, } \frac{3h+h}{\sqrt{3}} = 1610$$

$$\text{বা, } 4h = 1610\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = \frac{1610\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{বা, } h = \frac{2788.60}{4}$$

$$\text{বা, } h = 697.15 \text{ (প্রায়)}$$

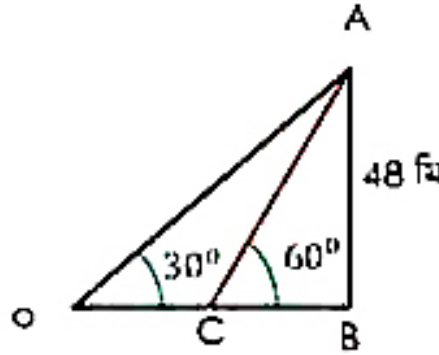
∴ ভূমি থেকে বেলুনের উচ্চতা 697.15 মিটার। (প্রায়)

(Ans)

Type-5

প্রশ্ন-১: ৪৮ মিটার দীর্ঘ একটি গাছের গোড়া থেকে কিছু দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° । ঐ বিন্দু থেকে x মি. পিছিয়ে গেলে শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° । গাছটি ঝড়ে এমনভাবে ভেঙ্গে গেল যে, তার অবিচ্ছিন্ন ভাঙ্গা অংশ দল্ভায়মান অংশের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে গাছটির গোড়া থেকে y মি. দূরে মাটি স্পর্শ করে। x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:



AB ৪৮ মিটার দীর্ঘ একটি গাছের গোড়া থেকে কিছু দূরে C বিন্দুতে গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ $\angle ACB = 60^\circ$ । x মি. পিছিয়ে O বিন্দুতে উন্নতি কোণ $\angle AOB = 30^\circ$ ।

এখন,

$$\Delta ABC \text{ এ } \frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{48}{BC} = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } BC = \frac{48}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta AOB \text{ এ } \frac{AB}{OB} = \tan 30^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{48}{OB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } OB = 48\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } OC + BC = 48\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } x = 48\sqrt{3} - \frac{48}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } x = 55.426 \text{ m}$$

আবার, গাছটি D বিন্দুতে $\angle BDC = 60^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে B থেকে y মিটার দূরে C বিন্দুতে মাটি স্পর্শ করে।

$$\therefore BC = y$$

$$\text{ধরি, } BD = z$$

$$CD = 48 - z$$

$$\Delta BCD \text{ এ } \cos \angle BDC = \frac{BD}{CD}$$

$$\text{বা, } \cos 60^\circ = \frac{z}{48 - z}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{z}{48 - z}$$

$$\text{বা, } 2z = 48 - z$$

$$\text{বা, } 2z + z = 48$$

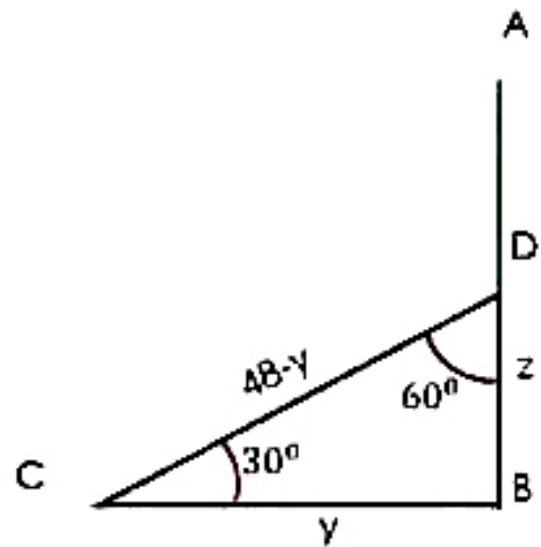
$$\text{বা, } z = 16 \text{ m}$$

$$\text{এখন, } \tan \angle BDC = \frac{BC}{BD}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{y}{z}$$

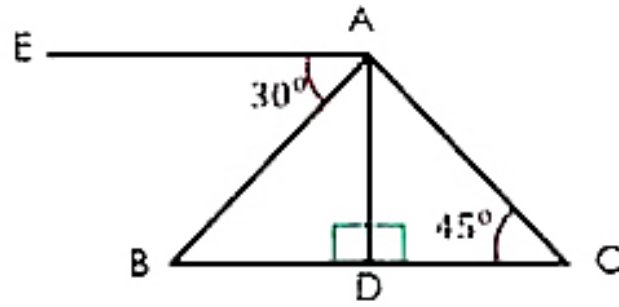
$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{y}{16}$$

$$\text{বা, } y = 27.713 \text{ m (Ans)}$$



SOLVED CQ

সৃজনশীল ১



চিত্রে $EA \parallel BC$, $AD \perp BC$, উন্নতি কোণ $\angle ACD = 45^\circ$ এবং $DC = 10$ মিটার।

(ক) উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণের সংজ্ঞা দাও।

(খ) AB বাহুর ঠিকানা নির্ণয় কর।

(গ) $\triangle ABC$ পরিসীমা নির্ণয় কর।

(ক)

উন্নতি কোণঃ ভূতলের উপরের কোনো বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে উন্নতি কোণ বলে।

অবনতি কোণঃ ভূতলের সমান্তরাল রেখার নিচের কোনো বিন্দু ভূ রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে অবনতি কোণ বলা হয়।

(খ)

দেওয়া আছে, $EA \parallel BC$, $AD \perp BC$.

উন্নতি $\angle ACD = 45^\circ$ এবং $DC = 10$ মি.

$$\triangle ACD \text{ এ } \tan \angle ACD = \frac{AD}{DC} \quad \left[\because \tan \theta = \frac{\text{পূর্ব}}{\text{ভূমি}} \right]$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{10}$$

$$\text{বা } 1 = \frac{AD}{10} \quad \text{এ, } AD = 1 \cdot 10$$

$$AD = 10 \text{ মি.}$$

এখন, $EA \parallel BC$ এবং $AD \perp BC$

সুতরাং $AD \perp EA \quad \therefore \angle EAD = 90^\circ$

এখন, $\angle EAB + \angle BAD = \angle EAD$

বা, $30^\circ + \angle BAD = 90^\circ$ [মান বসিয়ে]

বা $\angle BAD = 90^\circ - 30^\circ$

[পক্ষান্তর করে]

বা, $\angle BAD = 60^\circ$

সমকোণী $\triangle ABD$ এ

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{কোণ}}{\text{অতিকোণ}}$$

$$\cos \angle BAD = \frac{AD}{AB}$$

$$\text{বা, } \cos 60^\circ = \frac{10}{AB}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{10}{AB}$$

বা, $AB = 20$ মি

সুতরাং AB বাহুর দৈর্ঘ্য 20 মি

(গ)

খ হতে পাই, $AB = 20$ মিটার

$AD = 10$ মিটার

$DC = 10$ মি

এখন সমকোণী $\triangle ADC$ এ, পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$=10^2+10^2$$

$$=100+100$$

$$=\sqrt{200}$$

$$=14.4 \text{ মি (প্রায়)}$$

এখন সমকোণী $\triangle ABD$ - এ,,

$$\tan \angle BAD = \tan 60^\circ = \frac{BD}{AD} \quad \left[\because \tan \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} \right]$$

$$\sqrt{3} = \frac{BD}{10} \quad \therefore BD = 10\sqrt{3}$$

$$\text{এখন, } BC = BD + DC$$

$$= 10\sqrt{3} + 10$$

$$= 27.32 \text{ মি (প্রায়)}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ এর পরিসীমা} = AB + BC + CA$$

$$= (20 + 27.32 + 14.14) \text{ মি}$$

$$= 61.146 \text{ মি(প্রায়)} \quad [\text{Ans.}]$$

সৃজনশীল ২

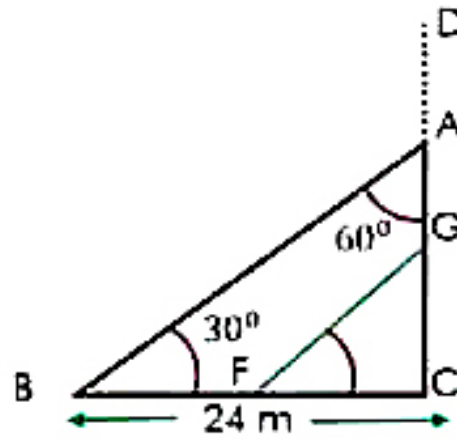
একটি সুপারি গাছ বাড়ে এমন ভাবে ভেসে গেল যেন ভাঙ্গা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 60° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 24 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। 8 মিটার লম্বা একটি মই ভূমির সাথে কোণ করে গাছের দন্ডায়মান অংশের সাথে ঠেস দেয়া হলো।

(ক) তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করো

(খ) সুপারি গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো

(গ) মই সুপারি গাছের দন্ডায়মান অংশের যে বিন্দুতে ঠেস দেয়া আছে তার উপরের দন্ডায়মান অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(ক) মনে করি, AB গাছটির ভাগ অংশ যা ঐ ভাগ অংশেই 60° কোণ উৎপন্ন করে এবং ডা গাছটির গোড়া থেকে $BC=24$ মি দূরে B বিন্দুতে মাটি স্পর্শ করে।



আবার $FG=8$ মিটার মইটি ভূমির সাথে 60° কোণ করে গাছের দলীয়মান অংশের সাথে ঠেস দেওয়া আছে।

তাহলে $\angle BAC = 60^\circ, \angle GFC = 60^\circ$ ।

(খ)

মনে করি, সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য $CD=h$ মি। $AC=x$ মি উচ্চতায় ভেঙ্গে গিয়ে ভাগ অংশ দলীয়মান অংশের সাথে $\angle CAB = 60^\circ$ উৎপন্ন করে গোড়া থেকে $CB=24$ মি দূরে মাটি স্পর্শ করে

এখানে, $AB=AD=(CD-AC)=(h-x)$ মি.

ΔABC থেকে পাই,

$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{24}{x}$$

$$\text{বা, } \therefore x = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sin 60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{h-x}$$

$$\text{বা, } h - x = \frac{2 \times 24}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{48}{\sqrt{3}} + x$$

$$\text{বা, } h = \frac{48}{\sqrt{3}} + \frac{24}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{48+24}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{72}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{72\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{72\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{বা, } h = 24\sqrt{3}$$

$$\therefore h = 41.569$$

গাছটির দৈর্ঘ্য = 41.569 মিটার (প্রায়)

(গ)

$$\text{(খ) নং হতে পাই, } AC = x = \frac{24}{\sqrt{3}} \text{ মি}$$

আবার, দেওয়া আছে,

FG মই এর দৈর্ঘ্য = 8 মি

$$\triangle FGC \text{ এ } \quad \angle GFC = 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{CG}{FG}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CG}{8}$$

$$\text{বা, } CG = \frac{8\sqrt{3}}{2} \quad \therefore CG = 4\sqrt{3}$$

সৃজনশীল ৩

একটি মেহগনি গাছ AB বাড়ে D বিন্দুতে এমন ভাবে ভেঙ্গে গেল যে তার ভাঙ্গা অংশ C বিন্দুতে ভূমির সাথে $\theta = 30^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে এবং গাছের গোড়া B থেকে $5\sqrt{3} \text{ m}$ দূরে মাটি স্পর্শ করে।

(ক) যদি $\cot(\theta - 30) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয় তবে $\sin \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{(খ) দেখাও যে, } \left(\frac{BD}{BC} + \frac{CD}{BC} \right)^2 = \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right)$$

(গ) একটি খুঁটি ও তক্তা যথাক্রমে গাছের দিকায়মান এবং ভাঙ্গা অংশ থেকে বানানো হবে। খুঁটি ও তক্তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$$\text{ক) দেওয়া আছে, } \cot(\theta - 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \cot(\theta - 30^\circ) = \cot 60^\circ \quad \text{ক, } \theta - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\text{বা, } \theta = 60^\circ + 30^\circ \therefore \theta = 90^\circ$$

$$\therefore \sin \theta = \sin 90^\circ = 1 \text{ (Ans.)}$$

$$\text{খ) বামপক্ষ} = \left(\frac{BD}{BC} + \frac{CD}{BC} \right)^2$$

$$= (\tan \theta + \sec \theta)^2 \text{ [পাশের চিত্র থেকে]}$$

$$= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \right)^2$$

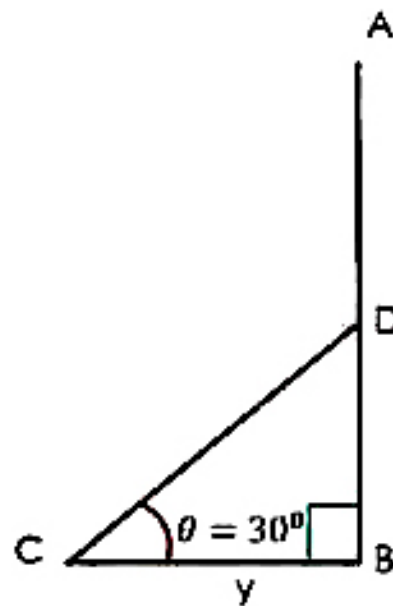
$$= \left(\frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} \right)^2$$

$$= \frac{(\sin \theta + 1)^2}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \left(\frac{BD}{BC} + \frac{CD}{BC} \right)^2 = \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \text{ (দেখানো হলো)}$$



$$\therefore \frac{BD}{BC} = \tan \theta$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \sec \theta$$

গ) মনে করি, গাছটি ভূমি থেকে h উচ্চতায় D বিন্দুতে ভেঙ্গে পড়ে এবং ভাঙ্গা অংশের দৈর্ঘ্য = x

চিত্র হতে পাই,

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{BC}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{5\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

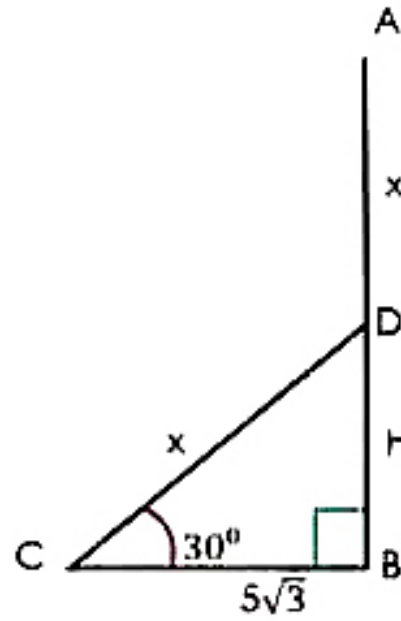
$$\therefore h = 5 \text{ মিটার}$$

$$\text{আবার, } \cos 30^\circ = \frac{BC}{CD}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{x}$$

$$\text{বা, } x = 5\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = 10$$



খুঁটির দৈর্ঘ্য $h = 5$ মিটার এবং ভক্তার দৈর্ঘ্য $x = 10$ মিটার (Ans.)

সৃজনশীল ৪

একটি নদীর তীরে কোনো এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখল যে ঠিক সন্ধ্যাসূজি অপর তীরে একটি বৈদ্যুতিক খুঁটির উন্নতি কোণ 60° । ঐ স্থান থেকে 150 মিটার পিছিয়ে দেখল যে বৈদ্যুতিক খুঁটির উন্নতি কোণ 30° হয়েছে।

ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্রটি আঁক।

খ. নদীটির বিস্তার নির্ণয় কর।

গ. বৈদ্যুতিক খুঁটির উচ্চতা এবং ১ম অবস্থা থেকে বৈদ্যুতিক খুঁটির শীর্ষ বিন্দুর সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

(ক) ভূতলস্থ O বিন্দুতে AB বৈদ্যুতিক খুঁটির শীর্ষ A এর উন্নতি কোণ $\angle AOB = 60^\circ$ । ঐ স্থান হতে 150 মিটার পিছিয়ে C বিন্দুতে গেলে উন্নতি কোণ $\angle ACB = 30^\circ$ হয়। OB নদীর বিস্তার।

খ) ধরি, প্রথম স্থান O হতে বৈদ্যুতিক খুঁটির দূরত্ব x মিটার এবং বৈদ্যুতিক খুঁটির উচ্চতা h মিটার তাহলে, $AB = h$ মিটার

নদীর বিস্তার $OB = x$ মিটার

দেওয়া আছে, $OC = 150$ মিটার

$\therefore BC = (x + 150)$ মিটার

এখন, $\triangle AOB$ এর জন্য, $\tan \angle AOB = \frac{AB}{OB}$

$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{h}{x+150}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{x+150}$$

[(i) নং সমীকরণ হতে]

$$\text{বা, } x + 150 = 3x$$

$$\text{বা, } 2x = 150 \therefore x = 75$$

অর্থাৎ প্রথম স্থান হতে বৈদ্যুতিক খুঁটির দূরত্ব ৭৫ মিটার।

\therefore নদীর বিস্তার = 75 মিটার (Ans.)

(গ)

'খ' থেকে পাই, নদীর বিস্তার = 75 মিটার

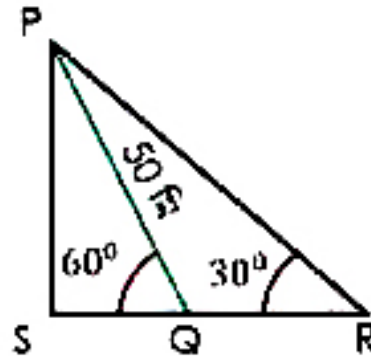
\therefore বৈদ্যুতিক খুঁটির উচ্চতা, $h = x\sqrt{3} = 75\sqrt{3}$ মিটার। (Ans.)

চিত্র থেকে, $OB = 75$ মিটার এবং $AB = 75\sqrt{3}$ মিটার।

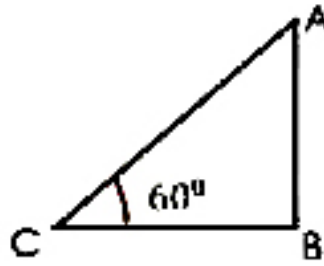
$$\therefore OA = \sqrt{OB^2 + AB^2} = \sqrt{75^2 + (75\sqrt{3})^2} = 150 \text{ মিটার}$$

সূচনশীল ৫

দৃশ্যকল্প-I :



দৃশ্যকল্প-II :



AB একটি পতাকার গুটি ।

ক. দৃশ্যকল্প-I হতে $\angle QPR$ এর মান নির্ণয় কর ।

খ. দৃশ্যকল্প-I হতে PS ও SQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।

গ. দৃশ্যকল্প II এ বর্ণিত C বিন্দু হতে ৩২ মি. পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয় । পতাকার গুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।

ক) দেওয়া আছে, $\angle PQS = 60^\circ$

$$\therefore \angle QPR = 180^\circ - (\angle PRQ + \angle PQR)$$

$$= 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \text{ (Ans.)}$$

খ) চিত্রে, $PQ = 50$ মি.

ΔPQS -এ,

$$\sin \angle PQS = \frac{PS}{PQ}$$

$$\text{বা, } \sin 60^\circ = \frac{PS}{50}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PS}{50}$$

$$\therefore PS = 25\sqrt{3} = 43.301 \text{ মি. (প্রায়)}$$

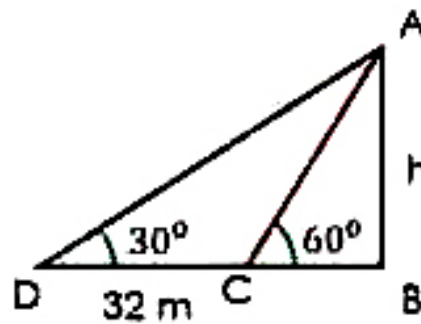
$$\Delta PSQ \text{ - এ, } \tan \angle PQS = \frac{PS}{SQ}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{SQ}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{SQ}$$

$$\therefore SQ = 25 \text{ মি. (Ans.)}$$

গ) মনে করি, পতাকার খুঁটির উচ্চতা, $AB = h$ মিটার এবং টাওয়ারের উন্নতি $\angle ACB = 60^\circ$ । C বিন্দু থেকে $CD = 32$ মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ $\angle ABD = 30^\circ$ হয়।



ধরি, $BC = x$ মিটার।

$$\therefore BD = BC + CD = (x + 32) \text{ মিটার}$$

$$\Delta ABC \text{ থেকে পাই, } \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{h}{x} \quad [\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}]$$

$$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}} \dots \dots \dots (1)$$

আবার, ΔABD থেকে পাই,

$$\tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$$

$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{h}{x+32}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+32} \quad [\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}h = x + 32$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 32$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 32$$

$$\text{বা, } \frac{3h-h}{\sqrt{3}} = 32$$

$$\text{বা, } \frac{2h}{\sqrt{3}} = 32$$

$$\text{বা, } 2h = 32\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = \frac{32\sqrt{3}}{2}$$

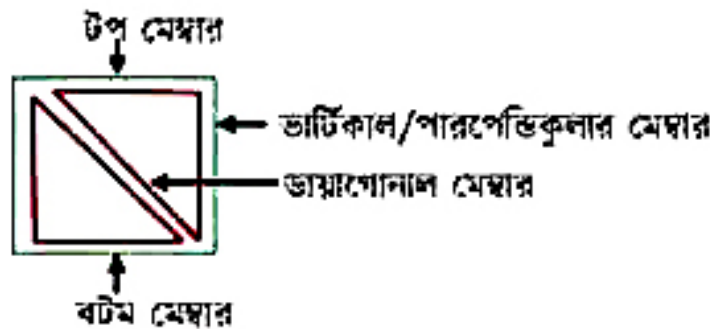
$$= 16\sqrt{3}$$

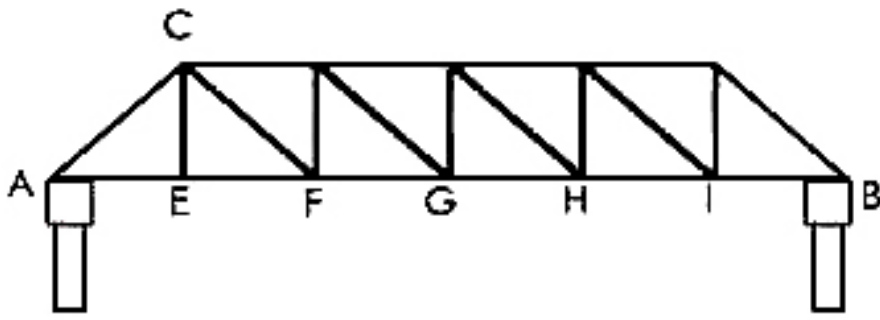
$$\therefore h = 27.713 \text{ মিটার (প্রায়) (Ans.)}$$

সৃজনশীল ৬

রসুলপুর গ্রামে একটি ছোট নদীর ওপর ট্রাস ব্রীজ নির্মাণ করা হবে। যেখানে ট্রাস ব্রীজের প্রতিটি বটম মেম্বারও সমান, টপ মেম্বার সমান, ডায়াগোনাল মেম্বার সমান এবং ভার্টিকাল মেম্বার ও সমান। প্রতিটি ডায়াগোনাল মেম্বার বটম মেম্বারের সাথে 45° কোণ তৈরি করে। আবার প্রতিটি ভার্টিকাল মেম্বারের সাথে 90° কোণে অবস্থান করে।

উল্লেখ্য যে, প্রতিটি ডায়াগোনাল মেম্বার দৈর্ঘ্য 20 মিটার





ক. ট্রাস ব্রিজটির প্রতিটি ভার্টিক্যাল মেম্বার এর উচ্চতা কত?

খ. ট্রাস ব্রিজটির সম্পূর্ণ স্প্যানের দৈর্ঘ্য কত? (স্প্যান AB)

গ. যদি বটম মেম্বার ও ডায়াগোনাল মেম্বার এর মধ্যবর্তী কোণ 45° হতো তবে সম্পূর্ণ স্প্যানের দৈর্ঘ্য কত হত?

ক) ট্রাস ব্রিজটির AEC অংশটি কেটে নিলে পাই,
উল্লীপকের মতে,

ডায়াগোনাল মেম্বার, AC = 20 মিটার

বটম মেম্বার ও ডায়াগোনাল মেম্বার এর মধ্যবর্তী কোণ, $\angle CAE = 45^\circ$

ভার্টিক্যাল মেম্বার, CE = ?

সমকোণী ত্রিভুজ ACE এর জন্য,

$\therefore \angle E = 90^\circ$ দেওয়া আছে

আমরা জানি,

$$\sin \angle CAE = \frac{CE}{AC}$$

$$\text{বা, } \sin 45^\circ = \frac{CE}{20}$$

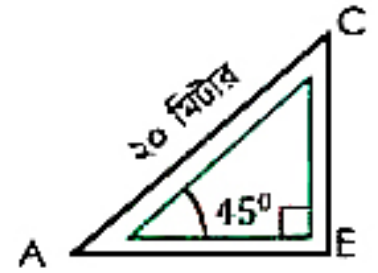
$$\therefore \sin \theta = \frac{\text{বস}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{CE}{20}$$

$$\text{বা, } CE = 10\sqrt{2}$$

\therefore ভার্টিক্যাল মেম্বার মিটার, CE = 14.14 মিটার

যেহেতু, উল্লীপক অনুসারে প্রতিটি ভার্টিক্যাল মেম্বার সমান। তাই প্রতিটি ভার্টিক্যাল মেম্বারের দৈর্ঘ্যই হবে 14.14 মিটার



খ) সম্পূর্ণ স্প্যানের দৈর্ঘ্য বলতে মূলত থেকে পর্যন্ত সবগুলো বটম মেম্বারের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি কে বোঝানো হয়েছে।

অর্থাৎ, স্প্যানের দৈর্ঘ্য = (AE + EF + FG + GH + HI + IB) বটম মেম্বার গুলোর দৈর্ঘ্য

ক নং হতে পাই,

ACE অংশের জন্য, AC = 20 মিটার

CE = 14.14 মিটার

$$\angle CAE = 45^\circ$$

সমকোণী ত্রিভুজ ACE এর জন্য

$$\tan \angle CAE = \frac{CE}{AE}$$

$$\text{বা, } \tan 45^\circ = \frac{14.14}{AE}$$

$$\text{বা, } 1 = \frac{14.14}{AE}$$

$$\therefore AE = 14.14 \text{ মিটার}$$

যেহেতু, প্রতিটি বটম মেম্বারের দৈর্ঘ্য সমান তাই,

$$AE = EF = FG = GH = HI = IB$$

$$\therefore AB = AE + AE + AE + AE + AE + AE$$

$$= 6 \times AE = (6 \times 14.14) = 84.84 \text{ মিটার}$$

সুতরাং ব্রীজটির সম্পূর্ণ স্প্যানের(AB) দৈর্ঘ্য = 84.84 মিটার

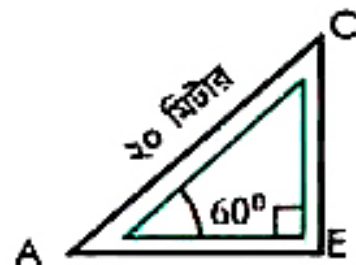
গ) যদি বটম মেম্বার ও ডায়াগোনাল মেম্বার এর মধ্যবর্তী কোণ 60° হতো তবে ট্রাস ব্রিজের অংশের চিত্র টি নিম্নরূপ হতো-

এখন, চিত্র মতে AEC সমকোণী ত্রিভুজে,

AC = 20 মিটার

$$\angle CAE = 60^\circ$$

AE = ?



ACE সমকোণী ত্রিভুজে,

আমরা জানি,

$$\cos \angle CAE = \frac{AE}{AC} \quad \left[\cos \theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} \right]$$

$$\text{বা, } \cos 60^\circ = \frac{AE}{20}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{AE}{20}$$

$$\text{বা, } 2AE = 20$$

$$\therefore AE = 10 \text{ মিটার}$$

আবার, যেহেতু প্রতিটি বটম মেম্বারের দৈর্ঘ্য সমান। তাই সম্পূর্ণ স্প্যানের দৈর্ঘ্য,

[‘x’ নং হতে]

$$AB = 6 \times AE$$

$$= (6 \times 10) = 60 \text{ মিটার}$$

সুতরাং, যদি বটম মেম্বার ও ডায়াগোনাল মেম্বারের মধ্যবর্তী কোণ 60° হতো, তবে সম্পূর্ণ স্প্যানের দৈর্ঘ্য হতো 60 মিটার [Ans.]

MAIN TOPIC

সূচক

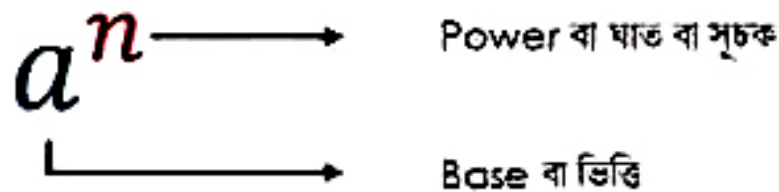
সূচক কী ?

→ কোন রাশিতে একই উৎপাদক যতবার গুণ আকারে থাকে তাকে ওই উৎপাদকের সূচক বলে। যেমন-

$$a^2 = a \times a$$

$$a^4 = a \times a \times a \times a$$

এখানে,



শর্তাবলি, $a \in \mathbb{R}$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং $n \in \mathbb{Q}$ (মূলদ সংখ্যার সেট)

অর্থাৎ, a যেকোন বাস্তব সংখ্যা এবং n যেকোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, n সংখ্যক ক্রমিক গুণ হলো a^n ।

অর্থাৎ, $a \times a \times a \dots \times a$ (n সংখ্যকবার a) = a^n ।

$$(১) \left(\frac{a}{b}\right)^m = a^m \div b^m (b \neq 0)$$

$$\text{অথবা, } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(২) a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$(৩) a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$$(৪) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(৫) \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

উদাহরণ:

$$\bullet x^4 \div y^4 = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

$$\bullet \frac{x^5}{7^5} = \left(\frac{x}{7}\right)^5$$

উদাহরণ:

$$\bullet 5^0 = 1$$

$$\bullet (-3)^0 = 1$$

উদাহরণ:

$$\bullet a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\bullet x^{-5} = \frac{1}{x^5} (x \neq 0)$$

$$\bullet 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

উদাহরণ:

$$\bullet a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$\bullet (x^3)^5 = x^{15}$$

$$\bullet x^5 \times y^5 = (xy)^5$$

উদাহরণ:

$$\bullet \sqrt{x^2} = x^{\frac{2}{2}}$$

$$\bullet (\sqrt[3]{x})^2 = x^{\frac{2}{3}}$$

a^0 এর ব্যাখ্যা (শূন্য সূচক)

$$\rightarrow \frac{a^p}{a^p} = 1$$

$$= a^{p-p} \text{ এখানে, } \boxed{a \neq 0}$$

$$= a^0$$

$$= 1$$

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow \frac{0^0}{0^0} \end{array} \right.$$

$$= 0^{0-0} \rightarrow \text{অসংজ্ঞায়িত [} 0^0 = \text{অসংজ্ঞায়িত]}$$

$$\# 0^0 \propto \text{অনির্ণয় আকার}$$

ধনাত্মক সূচক

$$\bullet a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

$$\bullet (a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{n \cdot \frac{1}{n}}$$

$$= a^1$$

$$= a$$

n তম মূল (n^{th} Root)

- $x^2 = P$

$$\Rightarrow x = \sqrt{P}$$

$$\Rightarrow x = P^{\frac{1}{2}}$$

- $x^3 = P$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{P}$$

$$\Rightarrow x = P^{\frac{1}{3}}$$

- $x^4 = P$

$$\Rightarrow x = \sqrt[4]{P}$$

$$\Rightarrow x = P^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow x = P^{\frac{1}{4}}$$

- n মূলের জন্য

$$x^n = P$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[n]{P}$$

$$\Rightarrow x = P^{\frac{1}{n}}$$

এখানে,

$$2^{2^{3^2}}$$

এক্ষেত্রে নিয়ম হলো উপর থেকে হিসাব করা:

উদা: $2^{2^{3^2}} \rightarrow 2^{2^9} \rightarrow 2^{512} = \boxed{}$

• $a > 0, a \neq 1$ শর্তে

$$a^x = a^y \text{ হলে, } x = y$$

• $a > 0, b > 0, x \neq 0$ শর্তে

$$a^x = b^x \text{ হলে, } a = b$$

সতর্কতা :

$$\begin{aligned} & \# ax^{-1} \\ &= a \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{a}{x} \end{aligned}$$

VS



$$\begin{aligned} & (ax)^{-1} \\ &= \frac{1}{ax} \end{aligned}$$

[ভ্রমসাধক -1 থাকলে ডিগবাজি, মানে উল্টে যাবে]

লগারিদম

- $a^x = N$ ($a > 0, a \neq 1$) হলে, $x = \log_a N$ কে N এর a ভিত্তিক লগ বলা হয়।
- লগারিদমকে সংক্ষেপে লগ (log) লেখা হয়।

লগ লেখার নিয়ম-

$$\log_a y^p \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Power বা ঘাত} \\ \longrightarrow \text{পরিবর্তন} \\ \longrightarrow \text{Base বা ভিত্তি} \end{array}$$

$$\text{যেমন- } y = \log_a x^p$$

সূচকীয় এর বিপরীত হলো লগারিদম

লগের বিপরীত হলো সূচকীয়

$$\bullet y = a^x \rightarrow \text{জায়গা পরিবর্তন করলে} \rightarrow x = \log_a y$$

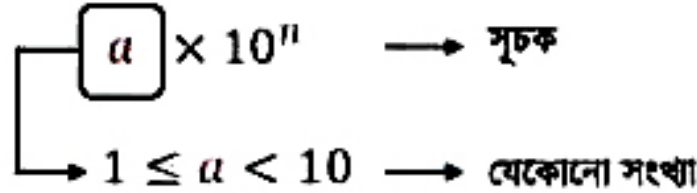
$$\bullet \log_a (MNP \dots) = \log_a M + \log_a N + \log_a P + \dots$$

$$\text{কিন্তু, } \log(M \pm N) \neq \log_a M \pm \log_a N$$

$$\bullet \log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$$

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ

হিসেবের সুবিধার্থে অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়। যেখানে $1 \leq a < 10$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ । কোন সংখ্যার $a \times 10^n$ রূপকে বলা হয় সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ।



Note:-

$$\log_a b \rightarrow a > 0; a \neq 1; b > 0; b \neq 1$$

$$= \log x$$

$$= \log \text{ এর ক্ষেত্রে } x \text{ এর মান } (0, \infty)$$

$$\log \text{ ফাংশনের ডোমেন, } x = (0, \infty)$$

$$\therefore \text{ বৈজ্ঞানিক রূপ : } a \times 10^n \text{ (} 1 \leq a < 10 \text{ এবং } n \in \mathbb{Z} \text{)}$$

\log এর ক্ষেত্রে x এর মান 0 থেকে বড়। এক্ষেত্রে $(0, \infty)$ যেখানে x এর ডোমেন 0 থেকে বড়।

সূচক হতে লগের কিছু মাধ্যম নির্ণয়

সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে	সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে
$10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$	$10^0 = 1$	$\log_r 1 = 0$
$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	$e^0 = 1$	$\log_e 1 = 0$
$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$	$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$	$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$	$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$

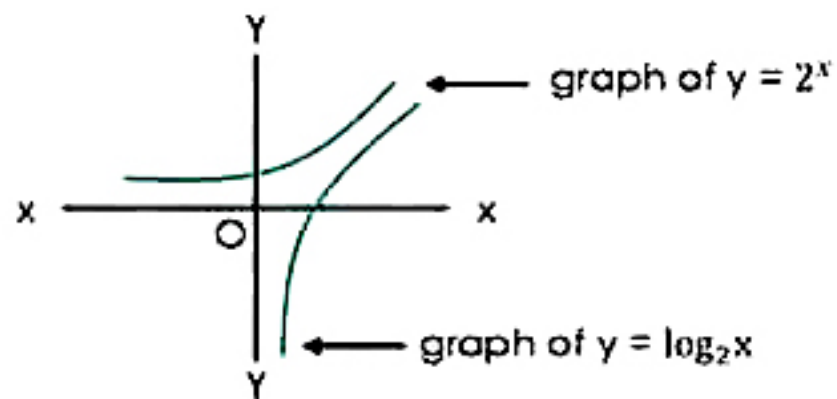
ক্যালকুলেটরের সাহায্যে বৈজ্ঞানিক রূপ-

$$\boxed{Digit} \rightarrow \equiv \rightarrow \boxed{ENG}$$

অনেক বড় বা ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়। এখানে $1 \leq a < 10$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ । কোন সংখ্যার $a \times 10^n$ রূপকে বলা হয় ঐ সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক রূপ।

$$\left. \begin{array}{l} a \times 10^n \\ 1 \leq a < 10 \end{array} \right\}$$

লগারিদমের ভিত্তি উল্লেখ না থাকলে রাশির বীজগাণিতীয় ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে একককে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়। লগ সারণিতে ভিত্তি 10 ধরতে হয়।



x এর মান কোন ঋণাত্মক সংখ্যা নয়, এর মান 0 থেকে বড়।

লগারিদম পদ্ধতি

→ লগ প্রধানত দুই প্রকার। যথা:-

i) স্বাভাবিক লগারিদম (\ln)

ii) সাধারণ লগারিদম (\log)

সাধারণ লগের পূর্ণক

একটি সংখ্যা N কে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ করে পাই,

$$N = a \times 10^n \text{ যেখানে } N > 0, 1 \leq a < 10 \text{ এবং } n \in \mathbb{Z} \text{।}$$

উভয় পক্ষে 10 ভিত্তিক লগ নিয়ে পাই,

$$\log_{10} N = n + \log_{10} a$$

n কে বলা হয় $\log N$ এর পূর্ণক।

N	N এর বৈজ্ঞানিক রূপ	সূচক	সংখ্যিক কিন্তু বামের দশমিক অঙ্কসংখ্যা 1 ও 2। সংখ্যিক কিন্তু ও এর পরবর্তী সংখ্যক অঙ্কের মাঝে 0 এর সংখ্যা	পূর্ণক
6237	6.237×10^3	3	4	$4 - 1 = 3$
623.7	6.237×10^2	2	3	$3 - 1 = 2$
0.6237	6.237×10^{-1}	-1	0	$-(0 + 1) = -1$ $= \bar{1}$
0.06237	6.237×10^{-2}	-2	1	$-(1 + 1) = -2$ $= \bar{2}$

i) স্বাভাবিক লগারিদম (Natural Logarithm) :

Calculator এ \boxed{AC} → $\boxed{\ln}$

স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার (1550-1617) ১৬১৪ সালে e কে ভিত্তি ধরে প্রথম লগারিদম সম্পর্কিত বই প্রকাশ করেন। e একটি অমূলদ সংখ্যা, $e = 2.71828...$ । একে তৃত্বীয় লগারিদম → নেপলিয়ন লগারিদম → e ভিত্তিক লগারিদম বলা হয়। $\log_e x$ কে $\ln x$ আকারেও লেখা হয়।

ii) সাধারণ লগারিদম (Common Logarithm) :

ইংল্যান্ডের গণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (1561-1630) ১৬২৪ সালে 10 কে ভিত্তি ধরে লগারিদমের টেবিল তৈরী করেন। একে ব্রিগস টেবিল বলে। এই লগারিদমকে $\log_{10} x$ আকারে লেখা যায়।

বি.দ্র.: \log এ ভিত্তির কথা উল্লেখ না থাকলে রাশির বীজগণিতীয় ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়। \log সারণিতে ভিত্তি 10 ধরতে হয়।

সাধারণ লগের অংশক

কোন সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক, 1 অপেক্ষা ছোট একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। এটি মূলত অমূলদ সংখ্যা। তবে একটি নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত অংশকের মান বের করা হয়। কোন সংখ্যার লগের অংশক লগ তালিকা থেকে বের করা যায়। আবার তা ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও বের করা যায়।

অংশক ও পূর্ণকের উদাহরণ:

$$0.0000836 = \frac{8.36}{100000}$$

$$= 8.36 \times 10^{-5}$$

এখানে পূর্ণক -5 বা একে $\bar{5}$ (5 বার /Bar) দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

$$\log 8.36 = 0.92221$$

এই 0.92221 ই হলো অংশক।

সতর্কতা: অংশক বা পূর্ণকের ক্ষেত্রে $1 \leq a < 10$ এই নিয়মটি মেনে চলা আবশ্যিক।

$\log_a x$ বা $\ln x$ আকারে স্বাভাবিক লগারিদম এবং $\log_{10} x$ কে সাধারণ লগারিদম বলা হয়।

লগারিদমের ভিত্তি উল্লেখ না থাকলে বীজগণিতীয় রাশির ক্ষেত্রে e এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়।

মনে রাখার সহজ কৌশল

প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশে যতগুলো অংক থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে সেই অঙ্কসংখ্যার চেয়ে 1 কম এবং তা হবে ধনাত্মক। অর্থাৎ উল্লিখিত অঙ্কসংখ্যা m হলে সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে $m - 1$ ।

প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশ না থাকলে দশমিক বিন্দু ও এর পরের প্রথম সার্থক অঙ্কের মাঝে যতগুলো 0 থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে 0 সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি এবং তা হবে ঋণাত্মক। অর্থাৎ উল্লিখিত 0 সংখ্যা k হলে সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে $\{-(k + 1)\}$ ।

পূর্ণক ঋণাত্মক হলে পূর্ণকটির বামে $(-)$ চিহ্ন না দিয়ে উপরে বার (\bar{k}) হিসেবে লিখা যায়।

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ : $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z}$)

স্বাভাবিক লগারিদম e ভিত্তিক এবং সাধারণ লগারিদম 10 ভিত্তিক।

- $\log_a 0 \rightarrow$ অসংজ্ঞায়িত
- $\log_a (-1) \rightarrow$ অসংজ্ঞায়িত
- $\log_a 1 \rightarrow$ এর মান 0
- $\log 1 \rightarrow 0$
- $\log_e e \rightarrow 1$
- $\log_{10} 0.000000001 = -9$

$$\text{আলোর বেগ} = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

$$= 3 \times 100000000 \text{ ms}^{-1}$$

$$= 300000000$$

লগারিদমের সূত্রাবলি

$$(1) x = \log_a N \text{ হলে, } a^x = N$$

$$(2) \log_a a = 1 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(3) \log_a 1 = 0 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(4) \log_a M^r = r \log_a M$$

$$(5) \log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (a > 0, M > 0, N > 0)$$

$$(6) \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\text{বি.স্ব. : } \log_a (M - N) \neq \log_a M - \log_a N \quad \log_a \frac{M}{N} \neq \frac{\log_a M}{\log_a N}$$

$$(7) \log_a m = \log_b m \times \log_a b = \frac{\log_b m}{\log_b a} \text{ অথবা } \log_a m = \log_e m \times \log_a e = \frac{\log_e m}{\log_e a} = \frac{\ln m}{\ln a}$$

$$(8) \log_a \sqrt{M} = \log_a (M)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a (M)$$

$$(9) \log_a b \times \log_b a = 1$$

$$(10) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ অথবা } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Type-1 সূচক

Model Example-1

$$\frac{2^{n+4} - 4 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} + 2}$$

$$= \frac{2^{n+4} - 2^2 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} + 1}$$

$$= \frac{2^n \cdot 2^4 - 2^3 \cdot 2^n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^n (2^4 - 2^3)}{2^n \cdot 2^1}$$

$$= \frac{8}{2}$$

$$= 4 \quad (\text{Ans})$$

Model Example-2

$$\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$$

$$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{(3^2)^{m+1}}{3^{m^2-1}}$$

$$= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1}$$

$$= 3^{m+1-m^2+m-2m-2+m^2-1}$$

$$= 3^{-2}$$

$$= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \quad (\text{Ans})$$

Now Practice:

$$1. \frac{2^{n+1} \cdot 3^{2n-m} \cdot 5^{m+n} \cdot 6^n}{6^n \cdot 10^{m+2} \cdot 15^n} \quad \text{Ans: } \frac{1}{50}$$

$$2. (2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1} \quad \text{Ans: } \frac{ab}{3a+2b}$$

$$3. \text{ দেখাও যে, } \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} \times \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} = 1$$

Type-3

Model Example-1

$$\log_{10} \frac{50}{147} = \log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7$$

Solve:

$$\begin{aligned} L.H.S &= \log_{10} \frac{50}{147} \\ &= \log_{10} 50 - \log_{10} 147 \\ &= \log_{10} (2 \times 5 \times 5) - \log_{10} (3 \times 7 \times 7) \\ &= \log_{10} (2 \times 5^2) - \log_{10} (3 \times 7^2) \\ &= \log_{10} 2 + \log_{10} 5^2 - \log_{10} 3 - \log_{10} 7^2 \\ &= \log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7 \\ &= R.H.S \quad \text{(proved)} \end{aligned}$$

Model Example-2

$$\frac{\log_{10} \sqrt{27} + \log_{10} 8 - \log_{10} \sqrt{1000}}{\log_{10} 1.2} \times \frac{\log_{10} (3^3)^{\frac{1}{2}} + \log_{10} 2^3 - \log_{10} (10^3)^{\frac{1}{2}}}{\log_{10} \frac{12}{10}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\log_{10} 3^{\frac{3}{2}} + \log_{10} 2^{\frac{3}{2}} - \log_{10} 10^{\frac{3}{2}}}{\log_{10} 12 - \log_{10} 10} \\
&= \frac{\frac{3}{2} \log_{10} 3 + 3 \log_{10} 2 - \frac{3}{2} \log_{10} 10}{\log_{10}(3 \times 2^2) - \log_{10} 10} \\
&= \frac{\frac{3}{2}(\log_{10} 10^3 + 2 \log_{10} 10^2 - 1)}{(\log_{10} 10^3 + 2 \log_{10} 10^2 - 1)} \quad [\log_{10} 10 = 1] \\
&= \frac{3}{2} \quad (\text{Ans})
\end{aligned}$$

Model Example-3

মান নির্ণয় কর: $\log_{2\sqrt{5}} 400$

Solve:

$$\begin{aligned}
&\log_{2\sqrt{5}} 400 \\
&= \log_{2\sqrt{5}} 16 \times 25 \\
&= \log_{2\sqrt{5}} 2^4 \times 5^2 \\
&= \log_{2\sqrt{5}} 2^4 \cdot (\sqrt{5})^4 \\
&= \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5})^4 \\
&= 4 \log_{2\sqrt{5}} 2\sqrt{5} \\
&= 4.1 \\
&= 4 \quad (\text{Ans})
\end{aligned}$$

Type-4

Model Example-4

সমাধান কর: $3^x = 16$

$$\Rightarrow \log 3^x = \log 16$$

$$\Rightarrow x \log 3 = \log 16$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 16}{\log 3}$$

$$\therefore x = 2.52 \quad [\text{ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে}]$$

Now Practice:

1. $\frac{\log \sqrt{y^3} + y \log x - \frac{z}{x} \log(xz)}{\log(xy) - \log z}$ এর মান নির্ণয় কর যখন $x=2, y=3, z=5$

Ans: $\frac{3}{2}$

2. $\log_x 324 = 4$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

Ans: $3\sqrt{2}$

অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সমস্যাগুলো

1. সরল কর: $\frac{2^{n+4} - 4 \times 2^{n+1}}{2^{n+2} - 2}$

2. সরল কর: $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

3. প্রমাণ কর: $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \cdot \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \cdot \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

4. প্রমাণ কর: $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$

5. $P = x^a, Q = x^b, R = x^c$ হলে দেখাও যে,

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \cdot \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \cdot \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$$

6. $x = 2, y = 3, z = 5, w = 7$ হলে,

(ক) $w \log \frac{xz}{y^2} - x \log \frac{z^2}{x^2y} + y \log \frac{y^4}{x+z}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{\log \sqrt{y^3} + y \log x - \frac{y}{x} (\log(xz))}{\log(xy) - \log z} = \log_y \sqrt{y^3}$